ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

“ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Κατανόηση των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευση της Συμμετρίας ως προς άξονα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων»

ΣΤΑΜΠΟΥΛΙΔΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

Επιβλέπων καθηγητής : ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΣΠΥΡΟΥ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)..(επιβλέπων Καθηγητής)	....	....
2)...	....	....
3)...	....	....

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η προσπάθεια αυτή αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία, στα πλαίσια του διατμηματικού-διαπανεπιστημιακού μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», που προσφέρεται από το Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών σε συνεργασία με το Πανεπιστήμιο Κύπρου. Για την ολοκλήρωση του παραπάνω προγράμματος απαιτείται και η εκπόνηση μιας διπλωματικής εργασίας.

Ως θέμα της διπλωματικής μου εργασίας επέλεξα σε συνεργασία με τον επιβλέποντα καθηγητή την: «**Κατανόηση των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευση της Συμμετρίας ως προς άξονα γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων**».

Η επιλογή του θέματος της συγκεκριμένης εργασίας οφείλεται σε δυο βασικούς λόγους.

Ο πρώτος έχει να κάνει με ένα πρόβλημα λίγο – πολύ γνωστό σε όλους μας. Υπάρχει μια διάχυτη άποψη στην κοινωνία ότι οι μαθητές κατά τη διάρκεια των σπουδών τους στο Ενιαίο Λύκειο αποκτούν γνώση που είναι ξεκομμένη από την πραγματικότητα, αναχρονιστική, υποβαθμισμένη και δεν καταλαβαίνουν στοιχειώδεις έννοιες.

Αυτή την αντίληψη σε γενικές γραμμές θα έλεγα ότι τη συμμερίζομαι. Πιστεύω όμως ότι δεν ισχύει για όλες τις γνώσεις που προσφέρονται από τη βαθμίδα αυτή του ελληνικού σχολείου. Θεωρώ ότι κάποιες από τις έννοιες που διδάσκονται σχετίζονται με την πραγματικότητα και μπορούν να κινούνται μέσα στα πλαίσια των σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων. Αυτό είναι κάτι που θα ήθελα να παρουσιάσω μέσα από την εργασία αυτή.

Ο δεύτερος λόγος είναι η προσωπική μου συμπάθεια προς απτά και εφαρμοσμένα αντικείμενα έρευνας που έχουν να κάνουν με την άμεση σχολική πραγματικότητα.

Θεώρησα λοιπόν πολύ καλή ιδέα να ασχοληθώ με το πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές της Β΄ λυκείου τη συμμετρία ως προς άξονα της γραφικής παράστασης συνάρτησης και να διεξάγω σχετική έρευνα. Ένα μαθηματικό θέμα μάλλον εξειδικευμένο αλλά αρκετά ‘ζωντανό’, αφού συνδέεται με εμπειρίες οπτικών αναπαραστάσεων που έχουν οι μαθητές από την καθημερινότητά τους, είναι άμεσα συνδεδεμένο με την καλαισθησία και την αρμονία , και οξύνει τη φαντασία.

Είχα στο μυαλό μου, πως με την ενασχόλησή μου με το θέμα αυτό, θα πλουτίσω τις γνώσεις μου για την έννοια της συμμετρίας, της συνάρτησης και τις αναπαραστάσεις, αντικείμενα (κυρίως τα δύο τελευταία) που είναι από τα κυρίαρχα μέσα στα σύγχρονα πλαίσια προβληματισμού και έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών. Αλλά και ότι θα μπορούσα να αξιοποιήσω τις γνώσεις, που θα αποκομίσω, για να βελτιώσω τη διδασκαλία μου και ίσως να προσφέρω μια εμπεριστατωμένη ‘γεύση’ από τη σχολική πραγματικότητα για το θέμα αυτό και σε άλλους συναδέλφους. Μια πιθανή πρόταση για τη διδακτική αξιοποίηση των αποτελεσμάτων του πονήματος αυτού θα αποτελούσε το επιστέγασμα της προσπάθειάς μου.

Σύμφωνα με τις επικρατούσες απόψεις είναι αποδεκτό ότι η γνώση δεν ‘μεταφέρεται’ από το δάσκαλο, αλλά οικοδομείται και αναπτύσσεται από το μαθητή με την ενεργό συμμετοχή του έχοντας τον δικό του προσωπικό τρόπο πρόσβασης σε αυτήν.

Αυτό φυσικά συμβαίνει και με τους μαθητές της Β΄ Λυκείου στη χώρα μας που καλούνται να οικοδομήσουν τις γνώσεις τους ερχόμενοι αντιμέτωποι, κατά τη διάρκεια των μαθητικών σπουδών τους, με μαθηματικές έννοιες που εκτός των προηγούμενων γνώσεών τους απαιτούν διαίσθηση, εμβάθυνση και αναπτυγμένη κρίση.

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να διερευνήσει αυτή την οικοδόμηση της γνώσης των μαθητών της Β΄ Λυκείου που σχετίζεται με τη συμμετρία συνάρτησης ως προς άξονα. Θέλουμε να ελέγξουμε κατά πόσο ενυπάρχουν στη σκέψη των μαθητών αναπαραστάσεις που άπτονται της συμμετρίας ως προς άξονα της γραφικής παράστασης συνάρτησης, κατά πόσο αυτοί μπορούν να αποκωδικοποιήσουν τις διάφορες πληροφορίες που τους παρουσιάζονται μέσα από τις σχετικές γραφικές παραστάσεις, τους αλγεβρικούς τύπους και τους πίνακες τιμών και αν μπορούν να διασύνδεουν την οπτική πλευρά μιας τέτοιας συμμετρίας (γραφική παράσταση) με την αλγεβρική (τύπος), αλλά και με αντίστοιχο πίνακα τιμών. Τέλος να ελέγξουμε τη σημασία σχετικών ορισμών και παραδειγμάτων που επιλέγουν ή δίνουν οι ίδιοι οι μαθητές, αλλά και άλλων σχετικών έργων, και να διαπιστώσουμε κατά πόσο μπορούν να αξιοποιήσουν και να εφαρμόσουν τις παραπάνω γνώσεις στην επίλυση σχετικού προβλήματος.

Η έρευνα διεξήχθη το Μάιο της σχολικής χρονιάς 2006 – 2007 με τη βοήθεια ερωτηματολογίου, σε δείγμα 139 μαθητών της Β΄ Λυκείου, θετικής, τεχνολογικής και θεωρητικής κατεύθυνσης, δύο σχολείων του Χαϊδαρίου ($1^{ο}$ και $2^{ο}$ Ενιαίο Λύκειο Χαϊδαρίου). Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον διευθυντή του $1^{ου}$ Ενιαίου Λυκείου Χαϊδαρίου κ. Α. Κοντοδημόπουλο, την διευθύντρια του $2^{ου}$ Ενιαίου Λυκείου Χαϊδαρίου κ. Μ. Συλάκου, τις υποδιευθύντριες του ίδιου σχολείου, τους συναδέλφους καθώς και τους μαθητές των δύο παραπάνω σχολείων για τη βοήθεια που μου προσέφεραν ώστε να καταστεί δυνατή η διεξαγωγή της έρευνας αυτής.

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Παναγιώτη Σπύρου για την βοήθειά του κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής και τις χρησιμότατες συμβουλές και παρατηρήσεις του, καθώς και τους δύο άλλους καθηγητές που συμμετείχαν στην τριμελή επιτροπή κ.κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη και Ευστάθιο Γιαννακούλια.

Ιδιαίτερη αναφορά θα ήθελα να κάνω στη σημαντικότατη βοήθεια που μου προσέφερε ο κ. Αθανάσιος Γαγάτσης στην τελική διαμόρφωση του

ερωτηματολογίου, στην στατική επεξεργασία του με τη μέθοδο Gras, στις πολύ αξιόλογες συμβουλές και παρατηρήσεις όπως και για το χρησιμότατο υλικό που μου προσέφερε για την εκπόνηση της εργασίας αυτής.

Τέλος θεωρώ πως θα ήταν μεγάλη παράληψη από μέρους μου αν δεν εξέφραζα και τις ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου. Τους ευχαριστώ για την υπομονή και τη συμπαράσταση που επέδειξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και κυρίως κατά την εκπόνηση αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα να αφιερώσω την εργασία αυτή στα παιδιά μου Γιώργο και Σοφία, ως μια μικρή ανταπόδοση για το χρόνο που έλειψα από αυτά κατά την προσπάθεια παρακολούθησης και περαίωσης των σπουδών μου.

1. ΤΟ ΕΥΡΥΤΕΡΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Ένας από τους στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο λύκειο είναι «να καλλιεργηθεί η μαθηματική σκέψη» (σελ.10, Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003, Τεύχος Β'».

Σύμφωνα με τους Mason, Burton και Stacey (1982) ο όρος μαθηματική σκέψη χαρακτηρίζει ένα είδος ευελιξίας της σκέψης, ευελιξία η οποία πρέπει να αναπτύσσεται στους μαθητές ως αποτέλεσμα του αναλυτικού προγράμματος.

Πλευρές της μαθηματικής σκέψης και αντικείμενο μελέτης των μαθηματικών αποτελούν η αίσθηση του αριθμού με τις πράξεις και τις ιδιότητές τους, όπως και η αίσθηση του χώρου και των αντικειμένων του με την αποτύπωση τους μέσω των γεωμετρικών σχημάτων.

Μια όμως από τις πιο σημαντικές όψεις της μαθηματικής σκέψης, στην οποία δίνεται μεγάλη βαρύτητα από το αναλυτικό πρόγραμμα στο Γυμνάσιο και κυρίως στο Λύκειο, είναι η **έννοια της συνάρτησης**.

Ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης περιλαμβάνει πλευρές της συνάρτησης όπως η <u>εξάρτηση</u> (ο διαφορετικός ρόλος που παίζουν η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή) η <u>μεταβολή</u> (αύξηση-μείωση) η <u>μεταβολή της μεταβολής</u> (κυρτή σημαίνει αύξηση του ρυθμού αύξησης) καθώς και καλή κατανόηση των επιπτώσεων ποικίλων πράξεων των συναρτήσεων, όπως η πρόσθεση, η σύνθεση, η μετατόπιση, η ολοκλήρωση (Eisenberg T., Dreyfus T. (1991)).

Κεντρική θέση στην έννοια της συνάρτησης αποτελεί η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων για την ίδια μαθηματική κατάσταση.

Μια συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με ποικίλους τρόπους.

- Με λεκτική περιγραφή.
- Με βελοδιάγραμμα.
- Με πίνακα τιμών.
- Με γραφική παράσταση.
- Με αναλυτική έκφραση (αλγεβρικό τύπο).

Στα σχολεία δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης της Ελλάδας, συνηθέστεροι τρόποι αναπαράστασης μιας συνάρτησης, κατά φθίνουσα διάταξη, είναι ο αλγεβρικός τύπος, η γραφική παράσταση και ο πίνακας τιμών ενώ ακόμη πιο σπάνια εμφανίζεται η λεκτική περιγραφή. Το βελοδιάγραμμα εμφανίζεται σε ελάχιστες περιπτώσεις. Ο αλγεβρικός τύπος αποτελεί τον κυρίαρχη μορφή αναπαράστασης μιας συνάρτησης ενώ και η γραφική παράσταση παίζει σημαντικό ρόλο στην αναπαράσταση της έννοιας αυτής.

Για τη χρήση της αναπαράστασης μιας συνάρτησης στη γραφική της μορφή υπάρχει μια ποικιλία διαφορετικών απόψεων.

Από τη μια ο Ian MacFarlane Smith (1964) παρατηρεί ότι η διεξαγωγή του μαθήματος των μαθηματικών γίνεται συχνά με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, ενώ για τους ικανούς μαθηματικούς, που λέγεται ότι σκέφτονται εξ ολοκλήρου αφαιρετικά, θεωρεί ότι μπορεί να κάνουν μια δική τους εσωτερική οπτικοποίηση χωρίς να το συνειδητοποιούν.

Επίσης οι Aspinwall, L. et al (1997), αναφέρουν ότι ‘είναι πολλές οι φωνές που μιλάνε για αλλαγές στις οδηγίες των αναλυτικών προγραμμάτων για τη διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού (Douglas, 1986, Tucker, 1988, Steen, 1989, Vinner, 1989, Tall, 1991, Zimmermann, 1991), συζητώντας για τον αυξανόμενο ρόλο που θα πρέπει να παίξει η οπτική σκέψη στο αναλυτικό πρόγραμμα, και παρουσιάζοντας μια πειστική θέση ότι η μαθηματική οπτικοποίηση είναι το κεντρικό κομμάτι γι’ αυτή την ανανεωτική κίνηση’.

Από την άλλη, υπάρχουν απόψεις όπως αυτή του Radatz (1979), ο οποίος έγραψε ότι οι εικονικές, δηλαδή οι οπτικές, αναπαραστάσεις μπορούν να προκαλέσουν γνωστικές δυσκολίες και ότι ‘η αντιληπτική ανάλυση και σύνθεση πληροφοριών που παρουσιάζονται σιωπηρά σε ένα γράφημα, συχνά έχει μεγαλύτερες απαιτήσεις από έναν μαθητή, από οποιαδήποτε άλλη όψη ενός προβλήματος’ (στο Lean & Clements, 1981, σελ.277). Οι Lean & Clements επίσης ισχυρίζονται ότι ένα άτομο με προτιμήσεις στις οπτικές διαδικασίες, δηλαδή με προτίμηση στο να σκέφτεται με νοητικές εικόνες, θα έρεπε στο να διατηρεί, ως μέρος της σκέψης του, περιττές συγκεκριμένες λεπτομέρειες (σελ.295). Επίσης σε κάποιες περιπτώσεις δημιουργείτε θέμα ελεγξιμότητας των εικόνων που χρησιμοποιούν τα άτομα, η οποία ενίοτε μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στην επίλυση προβλήματος (Richardson, 1969, Presmeg, 1992).

Σύμφωνα με τη B. Schwarz (1989) μια από τις ουσιώδεις συνιστώσες της έννοιας της συνάρτησης είναι η ικανότητα περάσματος από τη μια αναπαράσταση στην άλλη όταν χρειάζεται, η ευελιξία χρήσης της πιο κατάλληλης αναπαράστασης στην επίλυση ενός προβλήματος και η ικανότητα να «βλέπει» κάποιος μιαν αναπαράσταση όταν εργάζεται σε άλλη.

Η γραφική παράσταση στο Καρτεσιανό επίπεδο μιας πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής αποτελεί μια πολύ σημαντική αναπαράσταση της έννοιας μιας τέτοιας συνάρτησης και βοηθάει όχι μόνο για την πληρέστερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης αυτής, αλλά μπορεί να αποτελέσει το κλειδί για τη λύση κάποιων προβλημάτων αν τα αντιμετωπίσουμε με τη χρήση της, τα ‘δούμε’ δηλ. οπτικά.

Για παράδειγμα, η πρόταση «αν μια άρτια συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο σε ένα σημείο $\chi_0 \neq 0$ του πεδίου ορισμού της, τότε παρουσιάζει το ίδιο είδος ακρότατου σε ένα τουλάχιστον ακόμη σημείο του πεδίου ορισμού της», μπορεί να δικαιολογηθεί αλγεβρικά. Αν όμως εργασθούμε οπτικά, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, και λάβουμε υπ' όψη μας ότι ως άρτια έχει τον άξονα ψ΄ψ ως άξονα συμμετρίας, εύκολα μπορούμε να δικαιολογήσουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει το ίδιο είδος ακρότατου σε ένα τουλάχιστον ακόμη σημείο του πεδίου ορισμού της και μάλιστα να «δούμε» ότι αυτό είναι το $-\chi_0$, πράγμα που δεν προσδιορίζουμε εύκολα αντιμετωπίζοντας το θέμα αλγεβρικά.

Επίσης η αντιμετώπιση κάποιων προβλημάτων μπορεί να γίνει σχεδόν μόνο με τη χρήση γραφικής παράστασης και αξιοποιώντας τις πληροφορίες που προκύπτουν από αυτήν. Αν για παράδειγμα ζητηθεί ο υπολογισμός του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(\chi)=|\chi|-4$ και $g(\chi)=4-|\chi|$, ο μόνος τρόπος αντιμετώπισής του είναι να 'δούμε' το πρόβλημα με τη βοήθεια των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων και των πληροφοριών που προκύπτουν απ' αυτές.

Βέβαια το να μπορεί κάποιος να εργάζεται με γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων σημαίνει πως κάτι τέτοιο το έχει διδαχτεί. Η διδασκαλία δε αυτή δεν πρέπει να έχει παραμείνει απλά στο συντακτικό επίπεδο (syntax), δηλ. τους κανόνες του τρόπου σχεδίασης μιας γραφικής παράστασης ή και ανάγνωσης των συντεταγμένων ενός σημείου, αλλά να έχει διεισδύσει και σε βαθύτερο επίπεδο, στο σημασιολογικό (semantics) δηλ. στις έννοιες που αντιστοιχούν στη γραφική παράσταση και στη συσχέτισή τους μέσω του συγκεκριμένου σχήματος.

Μέσα στα πλαίσια του αναλυτικού προγράμματος πρέπει οι μαθητές να γνωρίσουν τη γραφική παράσταση μιας πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής στο Καρτεσιανό επίπεδο. Τις γραφικές παραστάσεις κάποιων κατηγοριών συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα τις γραμμικές, τις τετραγωνικές, τις εκθετικές, τις ημιτονοειδείς και άλλες, τις οποίες να μπορούν να χειριστούν με ευκολία και να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο κάποιες πράξεις των συναρτήσεων, όπως η πρόσθεση, η μεταφορά κ.α, συνδέονται με τις αντίστοιχες γεωμετρικές τους απεικονίσεις.

Αυτό που πρέπει να επιτευχθεί είναι όταν οι μαθητές βλέπουν τον αλγεβρικό τύπο μιας συνάρτησης να σχηματίζουν αυτόματα στο μυαλό τους μια καμπύλη, τη γραφική της παράσταση, και η οπτική ερμηνεία να είναι εξίσου ισχυρή με την αναλυτική.

Ένα ερώτημα που τίθεται στο σημείο αυτό είναι το τι συμβαίνει με τις ικανότητες των ίδιων των μαθητών αναφορικά με τα Μαθηματικά. Έχουν όλοι την ικανότητα να εργασθούν γλωσσικο-λογικά εξ' ίσου καλά όπως

και οπτικο-εικονικά; Μήπως έχουν κάποιες προτιμήσεις προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση;

Ο Krutetskii διεξήγαγε έρευνα στη Ρωσία και διαίρεσε τους μαθητές σε διάφορα ***επίπεδα,*** με βάση τις μαθηματικές ικανότητές τους που καθορίζονται κυρίως από τα γλωσσικο-λογικά συστατικά της σκέψης και σε ***τύπους,*** που καθορίζονται κυρίως από τα οπτικό–εικονικά συστατικά. Στην περίπτωση των οπτικό-εικονικών συστατικών, δεν είναι μόνο η ικανότητα να τα χρησιμοποιεί κάποιος, αλλά και η προτίμηση που δείχνει στη χρήση τους, το οποίο χαρακτηρίζει και τον τύπο του ατόμου (Krutetskii 1976, σελ. 318).

Οι τρεις κύριοι τύποι (μυαλών) σε σχολικό επίπεδο σύμφωνα με την παραπάνω κατηγοριοποίηση είναι:

I. Ο **Αναλυτικός**: Πολύ δυνατά γλωσσικο-λογικά συστατικά που υπερισχύουν έναντι των αδύναμων οπτικό-εικονικών συστατικών. Χωρικά στοιχεία αδύναμα. Δεν μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων και δεν αισθάνεται την ανάγκη να χρησιμοποιεί την οπτική υποστήριξη.

II. Ο **Γεωμετρικός**: Πολύ δυνατά οπτικό-εικονικά συστατικά, που υπερισχύουν έναντι των γλωσσικό-λογικών συστατικών, αν και αυτά είναι πάνω από τον μέσον όρο. Χωρικά στοιχεία πολύ καλά. Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων και αισθάνεται την ανάγκη να το κάνει αυτό.

III. Ο **Αρμονικός**: Δυνατά γλωσσικο-λογικά και δυνατά οπτικό-εικονικά συστατικά σε ισορροπία. Χωρικές έννοιες καλές.

Υποτύπος (a) **Αφηρημένος αρμονικός**: Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων, αλλά δεν το προτιμά.

Υποτύπος (b) **Εικονικός αρμονικός**: Μπορεί να χρησιμοποιεί οπτικά βοηθήματα στην επίλυση προβλημάτων και προτιμά αυτόν τον τρόπο εργασίας.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι και στους τρεις παραπάνω τύπους τα γλωσσικό-λογικά συστατικά υπάρχουν ισχυρά και είναι τουλάχιστον πάνω από το μέσο όρο.

Παρ’ ότι η παραπάνω κατηγοριοποίηση βασιζόταν σε μαθητές ταλαντούχους στα Μαθηματικά, ο Krutetskii (1969) πρότεινε η κατηγοριοποίησή του να επεκταθεί σε όλα τα επίπεδα δυνατοτήτων με τη δύναμη των γλωσσικό-λογικών συστατικών να καθορίζει το επίπεδο. Αξίζει τέλος να αναφέρουμε εδώ ότι αυτή η πρόταση επιβεβαιώθηκε στην έρευνα της Presmeg (1985).

Αρκετές είναι οι έρευνες της διεθνούς βιβλιογραφίας που κάνουν αναφορά για αποστροφή των μαθητών προς την οπτική αντιμετώπιση προβλημάτων, που έχουν να κάνουν με συναρτήσεις, και για την προτίμησή τους υπέρ της αλγεβρικής.

Ποιοι όμως είναι οι λόγοι που στρέφουν τους μαθητές προς μια προτίμηση υπέρ του αναλυτικού τρόπου αντιμετώπισης ενός προβλήματος τέτοιας φύσης; Εύκολα θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ένας βασικός λόγος για αυτό είναι ότι αυτοί συγκαταλέγονται στον αναλυτικό τύπο μυαλού που αναφέρει ο Krutetskii, οπότε τότε θα προέκυπτε και το συμπέρασμα ότι οι περισσότεροι μαθητές υπάγονται στην κατηγορία του αναλυτικού τύπου μυαλού. Ως άλλο λόγο θα μπορούσαμε να επικαλεστούμε το γεγονός ότι τα αναλυτικά προγράμματα δεν δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην γεωμετρική αντιμετώπιση μαθηματικών καταστάσεων, που έχουν να κάνουν με συναρτήσεις, δίνοντας αντιθέτως μεγάλη έμφαση στην αλγεβρική.

Το θέμα αυτό το έχουν διερευνήσει διεξοδικότερα για φοιτητές οι T.Eisenberg-T.Dreyfus (1991). Αναφέροντας σχετικές εργασίες κάποιων ερευνητών όπως των Mundy, Dick, Monk, Swan και Vinner υποστηρίζουν ότι ‘οι φοιτητές έχουν μια ισχυρή τάση να σκέφτονται μάλλον αλγεβρικά παρά οπτικά’.

Σύμφωνα με τους Eisenberg και Dreyfus κάποιες πιθανές αιτίες της προτίμησης αυτής είναι:

Α) Η αλγεβρική αντιμετώπιση κάποιες φορές είναι πιο σύντομη, πιο κομψή και προϋποθέτει λίγα, δίνοντας αποτέλεσμα χωρίς τις ευρύτερες επιπτώσεις του. Αντίθετα η οπτική δικαιολόγηση χτίζεται πάνω σε προαπαιτούμενες οπτικές γνώσεις, οι οποίες ενίοτε μπορεί να γίνονται πιο δύσκολα αντιληπτές. Αυτά συνιστούν μια πλευρά των αιτιών, τη γνωστική.

Β) Υπάρχει όμως και μια άλλη πλευρά, η κοινωνική. Το να διδάσκεις οπτικά είναι πιο δύσκολο αφού αυτό προϋποθέτει προετοιμασία για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης, την προβολή των slide, ή του προγράμματος του κομπιούτερ.

Γ) Οι πεποιθήσεις των καθηγητών σε όλα τα επίπεδα εκπαίδευσης ξεκινώντας από τα ανώτερα ότι τα μαθηματικά σε ανώτερο επίπεδο πρέπει να μεταδίδονται αλγεβρικά (λεκτικά) και όχι μέσα σε οπτικά πλαίσια.

Παρότι πολλοί μαθηματικοί και καθηγητές μαθηματικών χρησιμοποιούν την οπτική εξερεύνηση και επιχειρηματολογία στην καθημερινή τους πρακτική, δεν περνάνε τη χρήση αυτού του τρόπου μαθηματικής σκέψης

στους μαθητές τους. Άλλωστε η κυρίαρχη άποψη είναι ότι ο μοναδικός τρόπος μαθηματικής απόδειξης είναι ο λεκτικός στηριζόμενος στη μαθηματική λογική. ‘Απόδειξη χωρίς λέξεις δεν είναι αποδεκτή’.

Ο οπτικός τρόπος παρουσίασης μαθηματικών μέσω διαγραμμάτων δεν θεωρείται λοιπόν απόδειξη, αλλά παραπέμπεται ως επεξηγηματικό στοιχείο ή εκλαμβάνεται και ως μαθηματική μνημονική τεχνική.

Αυτές λοιπόν οι πεποιθήσεις των καθηγητών μεταδίδονται και στους μαθητές τους με αποτέλεσμα ο αναμενόμενος και αποδεκτός τρόπος απόδειξης για αυτούς να είναι ο αλγεβρικός.

Θεωρούμε ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν και για το λύκειο προσθέτοντας μια ακόμη διάσταση του θέματος, την οικονομική, αφού για τον οπτικό τρόπο διδασκαλίας πρέπει να υπάρχει και η κατάλληλη υλικοτεχνική υποδομή και η σωστή εκπαίδευση και ενημέρωση των καθηγητών για τη χρήση των παραπάνω˙ πράγματα που απαιτούν τη διάθεση χρημάτων εκ μέρους της πολιτείας.

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΣΗ(LINEARIZATION) & ΣΤΕΓΑΝΟΠΟΙΗΣΗ(COMPARTMENTALIZATION)

Υπάρχει όμως ένας ακόμη λόγος για την εξήγηση της παραπάνω στάσης των εμπλεκομένων στην διδακτική διαδικασία. Η μετατόπιση της γνώσης που λαμβάνει χώρα κατά την μετατροπή της από επιστημονική και ακαδημαϊκή σε διδακτική, όπως αυτή διδάσκεται στα πλαίσια του σχολείου.

Σύμφωνα με τη θεωρία του Yves Chevallard, η μετατόπιση της γνώσης που λαμβάνει χώρα κατά την μετατροπή της από επιστημονική και ακαδημαϊκή σε διδακτική, υφίσταται κάποιες αλλαγές σπουδαιότερες από τις οποίες είναι η γραμμικοποίηση (linearization) και η στεγανοποίηση (compartmentalization).

Η γνώση, η οποία μέσα στα ακαδημαϊκά πλαίσια είναι αρκετά περίπλοκη, δεν μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα πακέτο, αλλά κομματιάζεται και παρουσιάζεται διατεταγμένη αλληλοδιαδοχικά, με αποτέλεσμα να καταστρέφονται πολλές από τις διασυνδέσεις που αποτελούν το σώμα της και να διαρρηγνύεται η ενότητα της. Έτσι δομείται και παρουσιάζεται σε γραμμική μορφή και είναι σαν να έχει αρχή και τέλος (linearization).

Επίσης αυτή διδάσκεται στο σχολείο ξέχωρα από το περιεχόμενό της, με αποτέλεσμα να διασπάται από το σώμα της, σε μεγάλο αριθμό μεμονωμένων τμημάτων (compartmentalization) . Παρουσιάζεται με τρόπο που να είναι όσο το δυνατό πλησιέστερα προς τις προϋπάρχουσες γνώσεις και συχνά εμφανίζεται μέσω διαδικασιών και αλγορίθμων αυτών που πρέπει να διδαχτούν. Έτσι διατυπώνεται με τρόπο που προσδίδει έμφαση σε υπολογιστικές διαδικασίες και τελικά επιτρέπει τις αλληλοδιαδοχικές παρουσιάσεις.

Η θεωρία του Chevallard έχει άμεση εφαρμογή στο ζήτημα της οπτικής έναντι της αναλυτικής επεξεργασίας πληροφοριών. Η αναλυτική επεξεργασία χρησιμοποιεί προτασιακές αναπαραστάσεις, στις οποίες οι πληροφορίες σχηματίζουν μια ακολουθία εκφράσεων, ενώ η οπτική επεξεργασία χρησιμοποιεί διαγράμματα. Σύμφωνα με τους Larkin και Simon (1987) 'Η βασική διαφορά ανάμεσα στις διαγραμματικές και προτασιακές αναπαραστάσεις είναι ότι η διαγραμματική αναπαράσταση διατηρεί με σαφήνεια τις πληροφορίες για τις τοπολογικές και γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των συνιστωσών του προβλήματος ενώ η προτασιακή αναπαράσταση δεν το κάνει. Μια προτασιακή αναπαράσταση μπορεί φυσικά να διατηρεί άλλα είδη σχέσεων, για παράδειγμα χρονική ή λογική ακολουθία'.

Ο Chevallard ισχυρίζεται ότι η σχολική γνώση είναι υποχρεωτικά ακολουθιακή και έτσι αναπαρίσταται καλλίτερα προτασιακά και όχι διαγραμματικά. Επειδή λοιπόν τα σχολικά μαθηματικά λόγω της διδακτικής μετατόπισης συνήθως γραμμικοποιούνται και αλγοριθμοποιούνται οι δάσκαλοι προτιμούν να χρησιμοποιούν τις προτασιακές από τις διαγραμματικές αναπαραστάσεις. Έτσι λοιπόν οι μαθητές εξοικειώνονται με τον τρόπο, που για πολλά έτη τους παρέχεται η γνώση, και έτσι μπορεί να εξηγηθεί γιατί οι μαθητές επιλέγουν τις αναλυτικές αντί των οπτικών διαδικασιών.

1.2 ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΑΙΤΙΑ

Ένας άλλος τρόπος να εξηγήσει κανείς αυτή την κατάσταση είναι να την δει από τη γνωστική σκοπιά.

Είναι σχετικά πιο εύκολο να παρουσιάσει κανείς ένα επιχείρημα διατεταγμένο σε μια γραμμική αλληλουχία, από ότι έναν δισδιάστατο πίνακα πληροφοριών με πολλαπλές διασυνδέσεις μεταξύ ποικίλων τμημάτων πληροφοριών και επιπτώσεις προς πολλές διευθύνσεις.

Η παρουσίαση των πληροφοριών σε ένα διάγραμμα λαμβάνει χώρα χρησιμοποιώντας τη θέση στο επίπεδο με αποτέλεσμα κάθε στοιχείο να είναι 'γειτονικό' και να συσχετίζεται με πάρα πολλά στοιχεία, σε αντίθεση με τον προτασιακό τρόπο παρουσίασης, όπου το κάθε στοιχείο συσχετίζεται με το επόμενό του.

Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου (1992) η αλγεβρική έκφραση είναι αναλογική με την έννοια της γραμμικής μεταφοράς

πληροφοριών μέσω μιας ακολουθίας προτάσεων, ενώ η γραφική παράσταση είναι ολιστική, αφού οι σχέσεις μεταξύ των απλών συστατικών της γραφικής παράστασης δίνονται ταυτόχρονα με παράλληλο τρόπο και η επεξεργασία τους απαιτεί την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών.

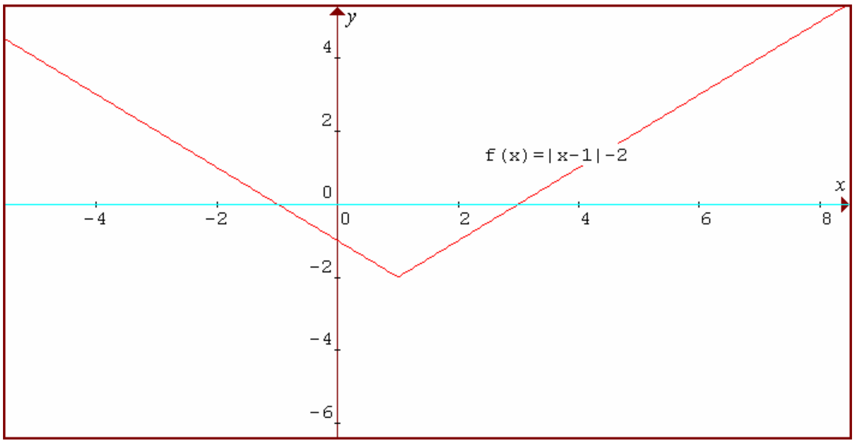
Έτσι το διάγραμμα είναι μια αρκετά πολύπλοκη και συμπυκνωμένη συλλογή πληροφοριών, τέτοια ώστε αν όλες οι πληροφορίες που

περιλαμβάνει ανασχηματιστούν σε προτασιακή μορφή να χρειάζεται πολύ χώρο.

Αλλά ακόμη και αν οι πληροφορίες που περιλαμβάνονται στη διαγραμματική αναπαράσταση μιας έννοιας είναι ίδιες σε όγκο με αυτές που περιλαμβάνονται στην αναλυτική της αναπαράσταση, πολλές από αυτές είναι σαφείς στο διάγραμμα ενώ είναι υπονοούμενες στην αναλυτική της αναπαράσταση.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με αναλυτική αναπαράσταση f(χ)=|χ-1|-2 δίνει για παράδειγμα σαφέστερες πληροφορίες από ότι η

αναλυτική της. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μπορούμε να διαπιστώσουμε αμέσως ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο χ=1, ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,1] και γνησίως αύξουσα στο [1,+∞), ότι έχει ρίζες το -1 και το 3, ότι έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία χ=1 κ.α.



Οι πληροφορίες αυτές φυσικά περιέχονται και στον τύπο της συνάρτησης αλλά δεν προκύπτουν άμεσα.

Θα μπορούσαμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι πολλές φορές η παρουσίαση πληροφοριών μέσω διαγραμμάτων είναι πιο χρήσιμη .

Όμως οι διαγραμματικές αναπαραστάσεις δεν γίνονται εύκολα αντιληπτές στους μη εξοικειωμένους. Οι Larkin και Simon ισχυρίζονται ότι «τα διαγράμματα είναι χρήσιμα μόνο σε αυτούς που γνωρίζουν τις κατάλληλες υπολογιστικές διαδικασίες για να τα εκμεταλλευτούν. Επιπλέον ένας λύτης προβλήματος συχνά χρειάζεται τις γνώσεις πώς να κατασκευάσει ένα 'καλό' διάγραμμα που θα του επιτρέπει να εκμεταλλευτεί τα πλεονεκτήματα που έχουμε συζητήσει».

Οι μαθητές λοιπόν που δεν έχουν διδαχτεί σωστά αρνούνται να σχεδιάζουν γραφικές παραστάσεις και δεν μπορούν να αξιοποιούν τις πληροφορίες που προκύπτουν από αυτές, άσχετα αν αυτές τους δίνονται ή τις σχεδιάζουν οι ίδιοι.

2.ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

Ένα σοβαρό ζήτημα για όσους ασχολούνται με τη διδασκαλία είναι αυτό που έχει να κάνει με τη **γνώση** των μαθηματικών, που αποκτούν οι μαθητές.
Ο μηχανισμός της γνώσης έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά:
Ο μηχανισμός απόκτησης γνώσης είναι μια διαρκής διαδικασία επαναδόμησης. Δεν υπάρχει δηλαδή μόνο αύξηση της ποσότητας, αλλά και πρόκληση επαναδιάταξης της ήδη υπάρχουσας γνώσης από την καινούργια. (Rumelhart & Norman : 1978). Κατά τη διαδικασία αυτή μεταβάλλονται οι σχέσεις μεταξύ των 'κομματιών' της γνώσης.
Ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι η διαδικασία κατασκευής της γνώσης βρίσκεται κάτω από την επίδραση εσωτερικών και εξωτερικών παραγόντων. Εσωτερικά επηρεάζεται εκτός των άλλων και από τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις. Ο E. Fischbein (1987), αναφέρεται σε αυτές τις ήδη πρότερες γνώσεις με τον όρο σιωπηρή ή υποσυνείδητη γνώση (tacit knowledge).Οι εξωτερικοί παράγοντες μπορεί να είναι πολιτιστικοί π.χ. τα φυσικά εργαλεία μετάδοσης της γνώσης, η κοινά αποδεκτή γνώση κ.α. ή κοινωνικοί π.χ. οι διαδικασίες αλληλεπίδρασης μεταξύ των ανθρώπων κ.α.
Ένα τρίτο χαρακτηριστικό είναι ότι η διαδικασία απόκτησης γνώσης καθορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τη γνωστική περιοχή, τα υποσύνολα δηλ. στα οποία χωρίζεται η συνολική γνώση ενός ατόμου. Αυτά τα αυτοτελή γνωστικά σχήματα εμπλουτίζονται ανεξάρτητα μέσω διαδικασιών επίλυσης προβλημάτων. Έτσι έχουμε χωριστή απόκτηση γνώσης για κάθε περιοχή αν και υπάρχει συχνή μεταφορά γνώσης από το ένα γνωστικό σχήμα σε άλλο και μια διαδικασία γενίκευσης στη βάση παρόμοιων καταστάσεων.
Ένα άλλο χαρακτηριστικό είναι ότι η αποκτηθείσα γνώση εξαρτάται άμεσα από το πλαίσιο μέσα στο οποίο αποκτήθηκε. Η γνώση για παράδειγμα ενός κανόνα αποθηκεύεται στη μνήμη συνοδευόμενη από κάποια παραδείγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διδασκαλία του κανόνα ή κάποιες ασκήσεις που το υποκείμενο έλυσε ή ακόμη και από κάποια συγκεκριμένη συμπεριφορά του δασκάλου. Όσο κάποιος αποκτά πείρα, η γνώση του σταδιακά αποπλαισιωποιείται, δηλ. παύει να συνδέεται στενά με την ιδιαίτερη κατάσταση, μέσα στην οποία αποκτήθηκε.

Μια σημαντική θεωρία γνώσης προτείνεται από τον Von Glaserfeld (Von Glaserfeld, 1987b), η *θεωρία του Οικοδομισμού*. Σύμφωνα με αυτή, βιώνοντας ένας οργανισμός εμπειρίες οικοδομεί τις δικές του γνωστικές δομές (γνωστικά σχήματα) με στόχο την επίλυση προβλημάτων, όπως τα αντιλαμβάνεται ο ίδιος. Η αξία αυτών των γνωστικών δομών καθορίζεται από το πόσο καλά ταιριάζουν με την εμπειρία του οργανισμού, από την δυνατότητα που παρέχουν σ' αυτόν στο να κατανοεί και γενικότερα από τη βιωσιμότητά τους ως μέσων επίλυσης προβλημάτων.

Η οικοδόμηση αυτή λειτουργεί με τον εξής τρόπο: το υποκείμενο ξεκινάει από μια ήδη υπάρχουσα κατάσταση γνώσης και μέσα από νέα ερεθίσματα και πληροφορίες οδηγείται σε μια νέα κατάσταση. Η νέα αυτή κατάσταση μπορεί να προκύψει από απλή ένταξη των νέων δεδομένων στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα, θα λέγαμε δηλαδή ότι έχουμε ένα είδος ποσοτικής μεταβολής των υπαρχόντων γνωστικών σχημάτων. Μπορεί όμως η υπάρχουσα γνώση να μην επαρκεί. Τότε προκύπτει μια αντιπαράθεση και μια παλινδρόμηση ανάμεσα στην υπάρχουσα γνώση και τη νέα κατάσταση. Το υποκείμενο αισθάνεται 'αποδιοργανωμένο' και σταδιακά επέρχεται αναδιοργάνωση των γνωστικών του σχημάτων, η οποία σε σχολικό επίπεδο επιτυγχάνεται μέσα από κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να πούμε ότι έχουμε ένα είδος ποιοτικής μεταβολής των υπαρχόντων γνωστικών σχημάτων.

Η αντιπαράθεση προκαλείται από **εμπόδια** (obstacles) δηλ. από σταθερές γνώσεις ή αντιλήψεις που λειτουργούσαν αποτελεσματικά σε ένα σύνολο προβληματικών καταστάσεων και στην προσπάθεια προσαρμογής τους σε νέες αποτυγχάνουν και προκαλούν λάθη.

Η γνώση έχει να κάνει με τη **μνήμη** , μια λειτουργία που αποτελείται από τρία στάδια: την κωδικοποίηση, την αποθήκευση και την ανάσυρση.

Ένα σοβαρό ζήτημα αποτελεί το ποια είναι η λειτουργία και ποια η δομή της μνήμης. Η επικρατέστερη σήμερα θεωρία είναι αυτή της Επεξεργασίας των Πληροφοριών.

Σύμφωνα με αυτήν, τα διάφορα αισθητηριακά ερεθίσματα που δέχεται το άτομο από το περιβάλλον προσλαμβάνονται και συγκρατούνται για σύντομο χρονικό διάστημα, περίπου 0,5 sec για τα οπτικά και 2 sec για τα ακουστικά (**αισθητηριακή μνήμη**). Αφού αναγνωριστούν και ταξινομηθούν, κάποια από αυτά προωθούνται στη **βραχύχρονη μνήμη** ή **μνήμη εργασίας** όπως λέγεται, ενώ κάποια αγνοούνται και χάνονται. Οι πληροφορίες που μεταφέρονται στη βραχύχρονη μνήμη συγκρατούνται προσωρινά και γίνονται αντικείμενα επεξεργασίας. Η στρατηγική της επανάληψης και της κωδικοποίησης, της οργάνωσης δηλ. και της συσχέτισης με ήδη υπάρχουσες συναφείς πληροφορίες επιτρέπουν τη συγκράτηση στη βραχύχρονη μνήμη. Φαίνεται μάλιστα ότι η ικανότητα

συγκράτησης πληροφοριών στη μνήμη αυτή είναι πολύ καλλίτερη όταν αυτές κωδικοποιούνται με τη βοήθεια της προϋπάρχουσας γνώσης.
Η ποσότητα των πληροφοριών που μπορεί να συγκρατήσει η μνήμη αυτή είναι περιορισμένη και υπολογίζεται κοντά στα 7±2 τμήματα πληροφορίας.

Αν το γνωστικό έργο ολοκληρωθεί στη φάση αυτή οι συγκεκριμένες πληροφορίες αποβάλλονται από τη βραχύχρονη μνήμη. Αν όμως το υποκείμενο (άτομο) τη χρειάζεται για περαιτέρω χρήση την προωθεί στη **μακρόχρονη μνήμη**. Εκεί αποθηκεύονται οι γνώσεις του ατόμου για το περιβάλλον και τον εαυτό του. Το σύστημα της μακρόχρονης μνήμης έχει εξαιρετικά μεγάλη αποθηκευτική ικανότητα και μάλιστα κατά πολλούς απεριόριστη. Στη μακρόχρονη μνήμη οι πληροφορίες κωδικοποιούνται ορισμένες φορές αυτόματα και άλλοτε μετά από επίπονη διαδικασία. Η κωδικοποίηση στη μνήμη αυτή συνήθως αγνοεί τις λεπτομέρειες και λαμβάνει υπόψη της την υπονοούμενη σημασία των πληροφοριών. Η κωδικοποίηση δηλ. λειτουργεί σημασιολογικά. Οι άνθρωποι μπορούν επίσης να χρησιμοποιήσουν και την οπτική κωδικοποίηση για την επεξεργασία εικόνων στη μακρόχρονη μνήμη. Υπάρχει η άποψη ότι οι άνθρωποι **θυμόμαστε καλλίτερα τις πληροφορίες που αναπαριστάνονται και οπτικά και σημασιολογικά** *(θεωρία της διπλής κωδικοποίησης).*

Η **Θεωρία Διπλής Κωδικοποίησης** (Dual Coding Theory) προτάθηκε από τον Paivio το 1990 και υποστηρίζει ότι στην ανθρώπινη νόηση λειτουργούν δύο ανεξάρτητα και αλληλένδετα συμβολικά συστήματα, **το λεκτικό**, που ειδικεύεται στην επεξεργασία γλωσσικών πληροφοριών και στο **μη λεκτικό**, που ειδικεύεται στην επεξεργασία μη λεκτικών αντικειμένων και γεγονότων π.χ. εικόνων, διαγραμμάτων και χωρικών πληροφοριών. Στα δύο αυτά συστήματα πραγματοποιείται η κωδικοποίηση, η οργάνωση, η αποθήκευση και η ανάκληση των αντίστοιχων τύπων πληροφοριών.
Τα δύο αυτά συστήματα έχουν βασικές αναπαραστατικές μονάδες, οι οποίες αναλύονται και συνδέονται με τρεις διαδικασίες ή στρατηγικές: αναπαραστατικές, αναφορικές και οργανωτικές ή μετασχηματιστικές στρατηγικές.
Οι <u>αναπαραστατικές στρατηγικές</u> χρησιμοποιούνται για την αναπαραγωγή γραπτού κειμένου από γραπτό κείμενο που υπάρχει στη μνήμη και για την ανακατασκευή μιας εικόνας ή ενός διαγράμματος με βάση μια εικόνα ή ένα διάγραμμα από τη μνήμη.
Οι <u>αναφορικές στρατηγικές</u> ρυθμίζουν τον τρόπο με τον οποίο μια εικόνα δημιουργείται από ένα κείμενο και αντίστροφα. Οι στρατηγικές αυτές μεταφράζουν πληροφορίες ανάμεσα στα δύο συμβολικά συστήματα, ενώ οι αναπαραστατικές στρατηγικές αναπαράγουν τις πληροφορίες στο ίδιο συμβολικό σύστημα.
Οι <u>μετασχηματιστικές στρατηγικές</u> περιλαμβάνουν διαδικασίες οργάνωσης και μετασχηματισμού κειμένων ή εικόνων. Έχουν να κάνουν

με την αναδόμηση πληροφοριών και την οικοδόμηση πρωτότυπων εσωτερικών και εξωτερικών αναπαραστάσεων και όχι με την απλή αναπαραγωγή των εξωτερικών πληροφοριών. Οι στρατηγικές αυτές οικοδομούνται πάνω σε υπάρχουσες εσωτερικές αναπαραστάσεις, που έχουν προκύψει από αναπαραστατικές ή αναφορικές διαδικασίες ή έχουν ανασυρθεί από τη μακρόχρονη μνήμη και εστιάζονται στην εσωτερική δομή του έργου.

Θεωρείται ότι υπάρχουν τρία βασικά είδη μακρόχρονης μνήμης, η επεισοδιακή, δηλ. η μνήμη ενός γεγονότος που το υποκείμενο ήταν παρών, η διαδικαστική, δηλ. η μνήμη που έχει να κάνει με την εκμάθηση μιας συμπεριφοράς ή δεξιότητας και η σημασιολογική δηλ. η μνήμη που έχει να κάνει με τη γενικότερη γνώση του κόσμου.

Τέλος θεωρείται ότι υπάρχει σύνδεση της μακρόχρονης μνήμης με την αισθητηριακή αφού η αισθητηριακή μπορεί να επηρεασθεί από πληροφορίες που είναι αποθηκευμένες στη μακρόχρονη μνήμη, ενώ και η μεταγνώση μπορεί να κατευθύνει τη ροή πληροφοριών προς τα ‘κατώτερα’ μνημονικά συστήματα.

Ειδικότερα για τα μαθηματικά η μακρόχρονη μνήμη περιέχει γενικές προτάσεις, γενικευμένες κατηγορίες προβλημάτων, ευρετικές τεχνικές και αλγορίθμους, αλλά και πιο εξειδικευμένη γνώση σχετικά με τις ποσότητες που υπεισέρχονται σε μια συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση που αντιμετωπίζει το άτομο και τις μεταξύ τους σχέσεις. Περιέχει επίσης τις προσωπικές πεποιθήσεις και απόψεις κάποιου γύρω από τα Μαθηματικά και τις μεταγνωστικές πληροφορίες.

Πώς όμως αναπαριστάνονται και οργανώνονται οι γνώσεις στη μακρόχρονη μνήμη;

Είναι γενικά αποδεκτό ότι τα θεμελιώδη στοιχεία από τα οποία αποτελείται το γνωστικό σύστημα είναι οι **έννοιες**. Για τον ορισμό της έννοιας υπάρχουν διάφορες απόψεις που μέσα σε αυτές, κατά την άποψή μας, μπορεί κάποιος να βρει τη σημασία της **έννοιας**.

Μια θεωρία περιγράφει τις έννοιες ως ένα σύνολο αναγκαίων και επαρκών καθοριστικών γνωρισμάτων, τα οποία ορίζουν σαφώς ποιες περιπτώσεις ανήκουν σε μια δεδομένη εννοιολογική κατηγορία και ποιες όχι *(κλασική άποψη)*.

Μια μεταγενέστερη θεωρία, η οποία προέκυψε μέσα από την προσπάθεια να συμφωνεί καλλίτερα η προηγούμενη άποψη με τα εμπειρικά δεδομένα, ισχυρίζεται ότι οι έννοιες αποτελούνται όχι από ορισμένα καθοριστικά γνωρίσματα, αλλά οργανώνονται γύρω από συγκεκριμένα πρότυπα *(θεωρία προτύπων)*. Η κατηγοριοποίηση ενός αντικειμένου, σύμφωνα με αυτήν, γίνεται με βάση την ομοιότητά του με τα πρότυπα μέλη μιας κατηγορίας.

Επειδή όμως υπάρχουν αρκετά μειονεκτήματα της τελευταίας άποψης έχει προταθεί μια άλλη θεωρία, σύμφωνα με την οποία αυτό που καθορίζει τα μέλη μιας κατηγορίας δεν είναι η ομοιότητά τους, αλλά κάποιο σύνθετο επεξηγηματικό πλαίσιο ή μια θεωρία στα πλαίσια της οποίας ερμηνεύονται οι πληροφορίες οι οποίες έρχονται από το περιβάλλον.

Ως προς τον τρόπο με τον οποίο οργανώνονται οι γνώσεις, η παλαιότερη άποψη είναι αυτή των *σημασιολογικών δικτύων*. Σύμφωνα με αυτή οι έννοιες στη σημασιολογική μνήμη αναπαρίστανται μέσα σε ένα πυκνό δίκτυο διασυνδέσεων που δεν είναι όλες το ίδιο ισχυρές (Collins & Loftus, 1975). Η ανάσυρση των πληροφοριών από τη μνήμη γίνεται μέσω της εξαπλούμενης ενεργοποίησης όλων των διαδρομών που σχετίζονται με τη σχετική έννοια.
Όταν μια νέα γνώση ενταχθεί σε ένα σημασιολογικό δίκτυο που την οργανώνει υπάρχει από το υποκείμενο γρήγορη και άκοπη πρόσβαση σε ένα τεράστιο σώμα γνώσεων. Έτσι δίνεται η δυνατότητα όχι μόνο ανάσυρσης μιας άμεσης γνώσης, αλλά και άλλων γνώσεων που παρέχουν τη δυνατότητα συμπερασμάτων ή και υπολογισμών άλλων γεγονότων (Medin & Ross, 1992).
Ένα ακόμη σημαντικό στοιχείο των εννοιών είναι ότι στην οργάνωσή τους ακολουθούν μια ιεραρχική σειρά. Δηλ. οργανώνονται σε ιεραρχικές δομές, όπου κάποιες είναι υπερκείμενες και κάποιες υποκείμενες. Έτσι κάθε έννοια έχει έναν αριθμό καθοριστικών γνωρισμάτων που κληροδοτούνται από τις υπερκείμενές της έννοιες. Για παράδειγμα η έννοια σολομός είναι υποκείμενη της έννοιας ψάρι, οπότε έχει κάποιες ιδιότητες που κληροδοτούνται από αυτό, όπως για παράδειγμα κολυμπάει, έχει βράγχια κ.α.

Μια άλλη άποψη για τον τρόπο με τον οποίο οργανώνονται οι γνώσεις είναι αυτή των *σχημάτων*. Ο όρος σχήμα χρησιμοποιήθηκε από τον Bartlett (1932), ο οποίος θεώρησε ότι οι άνθρωποι αναπαριστούν με σχήματα τις αναμνήσεις γεγονότων και αυτά δημιουργούν ισχυρές προσδοκίες που επηρεάζουν τις ερμηνείες που δίνουν στις εισερχόμενες πληροφορίες. Οι πληροφορίες που περιέχονται σε ένα σχήμα μπορεί στην οργάνωσή τους να ακολουθήσουν μια ιεραρχική σειρά, δηλ. να περιέχουν άλλα σχήματα, όπως και σενάρια ή πλαίσια. Τα σενάρια αποτελούν εξειδικευμένα και στερεότυπα σχήματα γνώσεων κάποιων καθημερινών καταστάσεων. Για παράδειγμα το σενάριο του εστιατορίου αναφέρεται στις γνώσεις που έχουν να κάνουν με το τι συμβαίνει όταν κάποιος πάει σε ένα εστιατόριο, ενώ τα πλαίσια είναι σχήματα που αναπαριστούν γνώσεις που σχετίζονται με τις ιδιότητες και τις θέσεις των αντικειμένων.
Τέλος υπάρχει η θεωρία των *συνδετιστικών μοντέλων,* τα οποία υποθέτουν ότι πρόσφατα αποκτηθείσες γνώσεις μεταβάλλουν τις γνώσεις

μας σχετικά (αυτές με τις οποίες υπάρχουν οι αντίστοιχες συνδέσεις). Τα μοντέλα αυτά προσπαθούν να εξηγήσουν το πως οι σημασιολογικές και επεισοδιακές πληροφορίες συγκροτούνται σε εποικοδομητικές μνήμες και μπορούν να δικαιολογήσουν τις αυθόρμητες γενικεύσεις και κατ' επέκταση την πρόκληση σημαντικών λαθών.

Μια άλλη γνωστική λειτουργία που συνδέεται στενά με τις προηγούμενες, δηλαδή τη γνώση και τη μνήμη, είναι η **αντίληψη**. Είναι μια διαδικασία ερμηνείας των πληροφοριών που έρχονται από το περιβάλλον και επηρεάζεται από προηγούμενες εμπειρίες και γνώσεις, οι οποίες δημιουργούν και προσδοκίες σχετικά με το τι υποπίπτει στις αισθήσεις μας.

Γνωρίζουμε ότι τα αισθητήρια όργανα δεν προσφέρουν στον εγκέφαλο ένα πιστό αντίγραφο του εξωτερικού κόσμου. Όλα αυτά τα μηνύματα που μεταφέρονται από τις αισθήσεις, μέσω νευρικής δραστηριότητας (αισθήματα), μεταφέρονται σε υψηλότερα επίπεδα του κεντρικού νευρικού συστήματος. Εκεί συνδυάζονται με τις σχετικές γνώσεις, οι οποίες είναι αποθηκευμένες στη μακρόχρονη μνήμη και έτσι αποκτούμε συνείδηση του αρχικού ερεθίσματος. Από τα προηγούμενα διαπιστώνουμε ότι η διαδικασία αυτή δεν είναι μονόδρομη, αφού προϋπάρχουσες γνώσεις μπορούν να την επηρεάσουν από την αρχή.

Υπάρχουν διάφορες θεωρίες σχετικά με τον τρόπο αντιληπτικής οργάνωσης. Μια από αυτές είναι εκείνη η οποία πρεσβεύεται από την ομάδα των Ψυχολόγων που είναι γνωστοί ως Ψυχολόγοι της **Μορφής (Gestalt)**. Αυτοί υποστηρίζουν ότι οι νοητικές διεργασίες αποτελούνται κυρίως από σχηματοποιήσεις σε σύνολα και όχι από ακολουθίες απλών αισθητηριακών αντιλήψεων ή από διασυνδέσεις ανάμεσα σε ερεθίσματα και αντιδράσεις. Ένα τρίγωνο, για παράδειγμα , δεν το αντιλαμβανόμαστε σαν να αποτελείται απλά από τρία ξεχωριστά ευθύγραμμα τμήματα, αλλά βλέποντάς το ως ένα ενιαίο σύνολο. Θα λέγαμε δηλαδή ότι αντιλαμβανόμαστε τα αντικείμενα μάλλον ως καλά οργανωμένους σχηματισμούς ή ολότητες παρά ως αθροίσματα των μεμονωμένων μερών από τα οποία αποτελούνται.

Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, η διαδικασία απόκτησης γνώσεων συνίσταται στη σχηματοποίηση των ερεθισμάτων σε σύνολα τα οποία αναδιοργανώνονται σε άλλα κατά τη διάρκεια της μάθησης.

Μεταξύ των διάφορων θεωριών που αναφέρονται στην αντίληψη θα άξιζε να αναφέρουμε μια η οποία αποτελεί σύνθεση άλλων και φαίνεται ότι βρίσκεται στο σωστό δρόμο. Είναι η θεωρία του U. Neisser (1976), σύμφωνα με την οποία, η αντίληψη είναι μια ενεργητική διαδικασία επεξεργασίας πληροφοριών, η οποία προσαρμόζεται στις απαιτήσεις του περιβάλλοντος. Όταν υπάρχουν πλούσια ερεθίσματα, τότε δρα ως μια άμεση λειτουργία που σκοπό έχει την προσαρμογή του ανθρώπου στον περιβάλλοντα χώρο του (Θεωρία του Gibson).

Όταν όμως οι πληροφορίες που διαθέτει το άτομο είναι περιορισμένες, τότε πρέπει να διαμορφώσει κανόνες και υποθέσεις, όπως στη διαδικασία επίλυσης προβλήματος, σε διαφορετικά επίπεδα (γνωστικό, κοινωνικό, πολιτισμικό, κ.α.) (Θεωρίες του Bruner και του Gregory).

Τέλος οι πιο πρόσφατες θεωρίες, οι υπολογιστικές, προσπαθούν να προσομοιώσουν τον τρόπο με τον οποίο πολύπλοκοι υπολογισμοί στο νευρικό σύστημα μπορεί να μετατρέψουν ακατέργαστα αισθητήρια ερεθίσματα σε μια αναπαράσταση του εξωτερικού κόσμου.

3. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

3.1. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Οι πληροφορίες που ένα άτομο αποκομίζει από το περιβάλλον του γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας από τον εγκέφαλο μέσω γνωστικών λειτουργιών, της προσοχής, της αντίληψης, της μνήμης, κ.α.

Ο τρόπος με τον οποίο αποκτώνται οι πληροφορίες αυτές καθορίζεται από τρεις βασικές ικανότητες του υποκειμένου:

α) την ικανότητα αναπαράστασης του περιβάλλοντος,

β) την ικανότητα χειρισμού και αλλαγών των αναπαραστάσεων αυτών,

γ) την ικανότητα αξιοποίησης των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από τη γνωστική διαδικασία.

Το σύστημα του εγκεφάλου που οικοδομεί και επεξεργάζεται σύμβολα, ονομάζεται από τη γνωστική ψυχολογία **νους** και οι σχετικές διαδικασίες νοητικές λειτουργίες.

Βλέπουμε λοιπόν ότι από τη μια υπάρχουν στο περιβάλλον κάποιοι φορείς πληροφοριών, οι οποίοι μέσω νοητικών διεργασιών λειτουργούν συμβολικά όπως η γλώσσα, οι εικόνες κ.α. και από την άλλη η ικανότητα απεικόνισης αυτών στο νου.

Όλοι αυτοί οι συμβολικοί φορείς πληροφοριών, τα σύμβολα, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν κάτι στον εξωτερικό κόσμο, λέγονται ***εξωτερικές αναπαραστάσεις***, ενώ οι νοητικές εικόνες, που δημιουργεί το υποκείμενο για να αναπαραστήσει την εξωτερική πραγματικότητα, λέγονται ***εσωτερικές αναπαραστάσεις*** (Ο J. Piaget (1952) για τις αναπαραστάσεις αυτές χρησιμοποιεί τον όρο σχήμα).

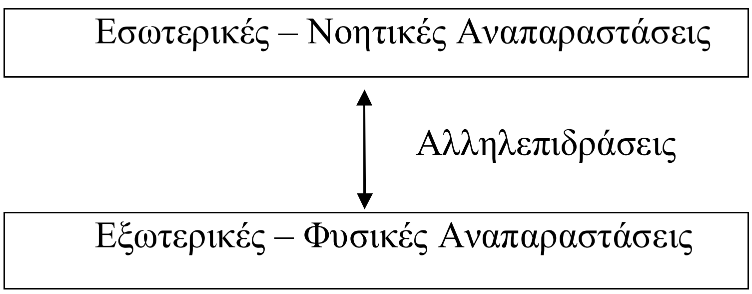
Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αντιπροσωπεύουν το σημαίνον ενώ οι εσωτερικές αναπαραστάσεις το σημαινόμενο (Dufour-Janvier et al., 1987 σελ. 109).

Στη βιβλιογραφία όμως υπάρχει για τις αναπαραστάσεις και ο όρος **σημειωτικές**, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τις εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις (Duval, 1987). Με αυτόν υπονοείται ότι τόσο οι εξωτερικές όσο και οι εσωτερικές αναπαραστάσεις αποτελούν συνδυασμούς σημείων.

Οι αναπαραστάσεις μπορούν να είναι εικονικές και συμβολικές. Ένας γεωγραφικός χάρτης ή μια γραφική παράσταση αποτελούν παράδειγμα εικονικής αναπαράστασης ενώ τα διάφορα σήματα, οι λέξεις ή τα σύμβολα των μαθηματικών αποτελούν παράδειγμα συμβολικής αναπαράστασης. Στις συμβολικές αναπαραστάσεις τα σύμβολα επιλέγονται συνήθως με αυθαίρετο τρόπο με αποτέλεσμα η διαδικασία ερμηνείας τους να μην υποβοηθείται από κάποιο συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.

Η σχέση ανάμεσα στις εξωτερικές και εσωτερικές αναπαραστάσεις αποτελεί αντικείμενο προβληματισμού για την επιστημονική κοινότητα. Ο Vygotsky θεωρούσε ότι η φύση των εσωτερικών αναπαραστάσεων επηρεάζεται και περιορίζεται ή εξαρτάται από την εξωτερική κατάσταση που αναπαρίσταται (Vygotsky, (1962)). Αντίθετα ο Piaget πίστευε ότι η ανάπτυξη των εσωτερικών αναπαραστάσεων είναι αυτή από την οποία εξαρτάται η κατανόηση και η χρήση εξωτερικών αναπαραστάσεων (Piaget, J., 1967). Η επικρατούσα άποψη σήμερα είναι ότι μεταξύ των εξωτερικών και εσωτερικών αναπαραστάσεων υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης (Goldin & Kaput, 1996: Kaput, 1998).

Αυτή η αμφίδρομη σχέση φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:



Αυτό θα το θεωρούσαμε μάλλον λογικό, αφού σε κάποιες περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος, όπως για παράδειγμα, διαβάζοντας και ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Πολύ συχνά οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα (Goldin & Kaput, 1996: Kaput, 1998).

Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων μεταξύ τους εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις αυτών που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996). Σύμφωνα με μια από τις αρχές του

Οικοδομισμού (Von Glaserfeld, 1987b) μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της αλλά χρειάζεται ερμηνεία, και για να ερμηνευθεί πρέπει να υπάρχει το άτομο που θα την ερμηνεύσει. Το κάθε άτομο όμως αντιλαμβάνεται μια εξωτερική αναπαράσταση ερμηνεύοντάς την σύμφωνα με τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα των προηγούμενων εμπειριών και γνώσεών του. Η ερμηνεία μπορεί να προκύψει συνδυάζοντας επιμέρους γνωστά στοιχεία με αποτέλεσμα την οικοδόμηση μιας νέας έννοιας.

Ο όρος αναπαράσταση είναι ασαφής και γι' αυτό επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες (Goldin & Kaput, 1996) .
Επικρατέστερος πάντως θεωρείται ο ορισμός που δίνεται από τον Kaput (1987), σύμφωνα με τον οποίο η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες ολότητες: (Kaput (1987))
α) την ολότητα που αναπαρίσταται,
β) την ολότητα που αναπαριστά,
γ) τις συγκεκριμένες πτυχές της προς αναπαράσταση ολότητας που αναπαρίστανται,
δ) τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και
ε) την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες (Kaput, 1987a, σ. 23).
Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό η αναπαράσταση εκλαμβάνεται ως ένα νοητικό σύμβολο ή έννοια , το οποίο αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο υλικό σύμβολο.
Ένας άλλος ορισμός, ο οποίος αναφέρεται ειδικά στα Μαθηματικά, είναι αυτός που δόθηκε από τους Confrey & Smith (1991) σύμφωνα με τον οποίο ως αναπαράσταση <u>στα μαθηματικά</u> εννοούμε μια νοητική δομή η οποία αποτελείται από διάφορα εργαλεία (πίνακες, σχήματα, εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις) και τον τρόπο με τον οποίο αυτά χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση μαθηματικών εννοιών.

Η ικανότητα έκφρασης μιας ιδέας με πολλούς τρόπους αποτελεί ένα βασικό χαρακτηριστικό της ανθρώπινης σκέψης . Μπορεί για παράδειγμα να επεξηγηθεί μια φράση ή ένα κείμενο με μια εικόνα ή ένα σχέδιο (Gagatsis, Demetriou, Afantiti, Michaelidou, Panaoura, Shiakalli & Christoforides, 1999). Η δυνατότητα αντιστοίχισης μιας εσωτερικής αναπαράστασης με περισσότερες από μια εξωτερικές αναπαραστάσεις ονομάζεται συνωνυμία.
Αυτή η ικανότητα της ανθρώπινης σκέψης, η προσφυγή δηλ. σε πολλά συστήματα αναπαράστασης, όπως προφορική έκφραση, σχέδιο, εικόνες, κινήσεις κ.α., μαζί με την ικανότητα χρήσης της γλώσσας ως μορφής επικοινωνίας, είναι που διαφοροποιούν την ανθρώπινη σκέψη από τη νοημοσύνη των ζώων.
Σύμφωνα με τους DeLoache, Uttal & Pierroutsakos (1998) η επαφή του ανθρώπου με τις διάφορες αναπαραστάσεις ξεκινά πριν ακόμη από τη

γέννησή του, αφού όντας έμβρυο, μέσα στον αμνιακό σάκο, έρχεται σε επαφή με την ομιλία και τη μουσική που ακούει. Μετά τη γέννησή του ο άνθρωπος εμπλέκεται σε ένα δίκτυο συμβόλων το οποίο συνεχώς επεκτείνεται και γίνεται πιο πολύπλοκο αποκτώντας μια αυξανόμενη ικανότητα όχι μόνο κατανόησης αλλά και παραγωγής συμβόλων.

Η χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη Μαθηματική Εκπαίδευση, η οποία περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών, αποτελεί φυσική συνέπεια όλων όσων αναφέρθηκαν παραπάνω αφού η Μαθηματική Εκπαίδευση είναι μέρος της εκπαιδευτικής σκέψης η οποία από τη μεριά της αποτελεί έκφραση του ανθρώπινου τρόπου σκέψης.
Τα Μαθηματικά φαίνεται να 'χρειάζονται' τις αναπαραστάσεις, αφού μέσα από αυτές μπορούν να μεταφέρονται κατάλληλα οι μαθηματικές ιδέες και νοήματα και βοηθείται η κατανόησή τους.
Ο Porzio (στο Φιλίππου Γ., 2003) για παράδειγμα, θεωρεί πως μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να οικοδομήσουν τις μαθηματικές έννοιες βλέποντας τις κοινές ιδιότητες αλλά και τις διαφορές ανάμεσα στις αναπαραστάσεις της έννοιας.
Οι Dufour-Janvier et al., (1987) ισχυρίζονται ότι:

1. Οι αναπαραστάσεις αποτελούν ένα ενυπάρχον (inherent) μέρος των μαθηματικών.
2. Οι αναπαραστάσεις είναι πολλαπλές συγκεκριμενοποιήσεις μιας έννοιας.
3. Οι αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται σε κάποιες μαθηματικές έννοιες για να μειώνουν κάποιες δυσκολίες που υπάρχουν.
4. Οι αναπαραστάσεις αποσκοπούν στο να κάνουν τα μαθηματικά πιο ελκυστικά και ενδιαφέροντα.

Οι ίδιοι, όμως, ερευνητές διαπίστωσαν μετά από έρευνα ότι η χρήση των αναπαραστάσεων είναι μερικές φορές αφηρημένη για τους μαθητές, πράγμα που μπορεί να τους οδηγήσει στην έλλειψη κατανόησης. Επίσης αναφέρουν ότι η πρόωρη χρήση τους ή η χρήση τους σε ακατάλληλα πλαίσια μπορεί να έχει αρνητικές επιπτώσεις για τους μαθητές.
Επίσης, οι Van Someren et al (1998) από τις έρευνες που διεξήγαγαν για τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία βρήκαν ότι η χρήση συνδυασμών αναπαραστάσεων στα μαθηματικά δημιουργεί νέα προβλήματα στους μαθητευόμενους. Υποστήριξαν πως όταν οι πληροφορίες παρουσιάζονται σε ποικίλες μορφές αναπαραστάσεων, πρέπει να διδάσκονται επίσης και οι σχέσεις ή οι διασυνδέσεις ανάμεσα στις αναπαραστάσεις αυτές, αφού αυτό είναι κάτι το οποίο δεν μπορούν να το καταφέρουν εντελώς μόνοι τους οι μαθητές.

Ο Kaput (1987a) θεωρεί ότι τα Μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από μια δομή σε άλλη ενώ αναφέρει χαρακτηριστικά ότι

«Μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα Μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής, που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση ». Ο ίδιος ερευνητής υποστηρίζει ότι πρέπει να δοθεί προσοχή στους τρόπους χρήσης των συμβόλων και των συνδυασμών τους μέσα στα ποικίλα συστήματα αναπαράστασης διάφορων μαθηματικών εννοιών, καθώς επίσης και στον τρόπο με τον οποίον αυτά σχετίζονται μεταξύ τους (Kaput 1985: 1987a: 1987b).

Οι μαθητές μέσα στα πλαίσια της διδασκαλίας των Μαθηματικών καλούνται να αντιμετωπίσουν πολλές δυσκολίες που έχουν να κάνουν από τη μια με τη σύνδεση της καθημερινής εμπειρίας με τα Μαθηματικά, και από την άλλη μέσα στα πλαίσια των Μαθηματικών, με τη μετάφραση των μαθηματικών εννοιών από τη μια αναπαράσταση στην άλλη.
Σημαντικά βοηθητικό ρόλο σε αυτή τους την προσπάθεια μπορούν να παίξουν οι εξωτερικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά. Υπάρχουν πέντε είδη εξωτερικών αναπαραστάσεων που χρησιμοποιούνται για τη μάθηση των Μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος (Lesh, Post & Behr, 1987):

1. Κείμενα- στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη σύμφωνα με καταστάσεις της καθημερινής ζωής και αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση καταστάσεων προβλήματος.
2. Χειριστικά αντικείμενα / μοντέλα – όπως είναι οι κύβοι αριθμητικής, η αριθμητική γραμμή, οι κύβοι Dienes όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος / μοντέλου μπορεί να μην έχουν νόημα αυτά καθαυτά, αλλά οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
3. Εικόνες ή διαγράμματα- στατικά εικονικά μοντέλα, τα οποία είναι δυνατό να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.
4. Γλώσσες - συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών διάφορων πεδίων των Μαθηματικών, όπως της Μαθηματικής Λογικής.
5. Γραπτά σύμβολα – τα οποία είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν και εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις, όπως για παράδειγμα 2χ-5=6, καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις στην καθομιλουμένη γλώσσα.

Αυτή η προσπάθεια σύνδεσης καθημερινών καταστάσεων με τα Μαθηματικά και μεταφράσεων των Μαθηματικών εννοιών από τη μια αναπαράσταση στην άλλη, που επιτελείται μέσα στα πλαίσια διδασκαλίας των Μαθηματικών μας οδηγεί στη θέση ότι **η διδασκαλία μας πρέπει να στοχεύει στην κατανόηση σε βάθος των μαθηματικών εννοιών μέσα από τη δημιουργία πλούσιων και καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων.**
Με τον όρο **κατανόηση** μιας έννοιας εννοούμε:

α) την ικανότητα *αναγνώρισης* της έννοιας μέσα από μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης που μπορεί να εμφανίζεται αυτή.
β) την ικανότητα *ευέλικτου χειρισμού* της μέσα στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου συστήματος αναπαραστάσεων.
γ) την ικανότητα *μετάφρασης* της έννοιας από το ένα σύστημα αναπαραστάσεων στο άλλο (Lesh, Post & Behr, 1987: Seeger, 1988).

Ο όρος μετάφραση αναφέρεται στις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από μια αναπαράσταση σε άλλη (Janvier, 1987).
Η διαδικασία μετάφρασης περιλαμβάνει την αρχική αναπαράσταση (πηγή) και την τελική (στόχο), ενώ αποτελεί μια δεξιότητα που είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση προβλήματος και γενικότερα για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών (Janvier, 1987a). Με την άποψη αυτή συμφωνούν πολλές ακόμη μελέτες.
Οι μεταφράσεις, λοιπόν, μιας έννοιας από το ένα αναπαραστασιακό σύστημα στο άλλο παίζουν σπουδαίο ρόλο, αφού εκτός των άλλων αποτελούν κριτήριο κατανόησης της έννοιας. Αλλά και στην επίλυση προβλήματος καταλαμβάνουν σημαντική θέση, αφού φαίνεται να σχετίζονται με τη διαδικασία αυτή.

Μια χαρακτηριστική περίπτωση συνωνυμίας, όπου δηλ. πολλές (εξωτερικές) αναπαραστάσεις είναι πολύ στενά συνδεδεμένες με μια έννοια, αποτελεί η συνάρτηση. Η έννοια αυτή μπορεί να εκφραστεί, όπως ήδη αναφέραμε, με ποικίλους τρόπους αναπαραστάσεων όπως πίνακα τιμών, αλγεβρικό τύπο(αναλυτική έκφραση), γραφική παράσταση, λεκτική έκφραση και βελοδιάγραμμα. Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) κάθε τρόπος αναπαράστασης περιέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας ενώ οι διάφοροι τρόποι αναπαράστασης της ίδιας έννοιας λειτουργούν συμπληρωματικά ο ένας προς τον άλλον.
Αρκετές έρευνες δείχνουν πως η μετάβαση από τη μια αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες για τους μαθητές Γυμνασίου, τους απόφοιτους Λυκείου και για τους φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής.
Ο **F. Hitt** διέκρινε 5 επίπεδα κατανόησης στην κατασκευή της έννοιας της συνάρτησης, τα οποία μάλιστα προτείνει να ισχύουν και για άλλες έννοιες.
Επίπεδο 1. Ανακριβείς ιδέες σχετικά με την έννοια (μη συνεκτική μίξη διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).
Επίπεδο 2. Αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας. Αναγνώριση συστημάτων αναπαράστασης.

Επίπεδο 3. Μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από το ένα σύστημα στο άλλο.
Επίπεδο 4. Συνεκτική διασύνδεση (articulation) μεταξύ δυο συστημάτων αναπαράστασης.
Επίπεδο 5. Συνεκτική διασύνδεση μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης στην επίλυση προβλήματος.

Έτσι λοιπόν βασικό στόχο της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης θα πρέπει να αποτελεί η ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις (Hitt, 1998). Γενικότερα θα μπορούσαμε να υιοθετήσουμε την άποψη των Goldin & Kaput, σύμφωνα με την οποία ένας κεντρικός στόχος της μαθηματικής παιδείας είναι η αύξηση της ισχύος των εσωτερικών αναπαραστάσεων των μαθητών (Goldin & Kaput, 1996). Ισχυρό είναι ένα σύστημα αναπαράστασης που έχει ευρύ και ποικίλο πεδίο εφαρμογής.

3.2. ΕΡΕΥΝΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Οι Goldin και Kaput(1996) υποστηρίζουν ότι ο όρος αναπαράσταση αποτελεί ένα χρήσιμο θεωρητικό εργαλείο για τη λεπτομερή περιγραφή σε σχέση με το τι μπορούν και τι δεν μπορούν να κάνουν οι μαθητές, αλλά και ποιες ικανότητες επιδιώκεται να αναπτύξουν. Επίσης παρέχει τη δυνατότητα λεπτομερούς ανάλυσης ιδιοτήτων μαθηματικής δομής καθώς και εξέτασης των αποτελεσμάτων που οφείλονται στο μέσο παρουσίασης των εξωτερικών αναπαραστάσεων.
Έτσι, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τις μαθησιακές διαδικασίες, αφού η περιγραφή του τρόπου εξέλιξης των συστημάτων αναπαράστασης στο χρόνο περιλαμβάνει τόσο τις πράξεις σε εξωτερικές αναπαραστάσεις όσο και τη συσχετιζόμενη με αυτές δομική εξέλιξη νέων συστημάτων, που οικοδομούνται πάνω σε προϋπάρχοντα συστήματα αναπαράστασης.

Αρκετές έρευνες έχουν διεξαχθεί για το ρόλο των συστημάτων αναπαράστασης και της αλλαγής πεδίου αναπαράστασης στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Τις σχετικές έρευνες θα μπορούσαμε να τις ταξινομήσουμε, ανάλογα με το περιεχόμενό τους, σε τέσσερις κατηγορίες:

1. Έρευνες που προτείνουν μια Θεωρία Αναπαράστασης (Δημητρίου, 1997: Goldin, 1998: Goldin & Kaput, 1996: Kaput, 1985: Kaput, 1987: Kaput, 1997b: Karmiloff-Smith, 1992: Roth & McGinn, 1998: Von Glaserfeld, 1987b).
2. Έρευνες που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλήματος (Goldin, 1987: Lesh, Post & Behr, 1987: Cifarelli, 1998: Gagatsis et al., 1999: Owens & Clements, 1998).

3. Έρευνες που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες (Lesh, Behr & Post, 1987: Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995: Boulton-Lewis, 1998: Even, 1998: Gagatsis, 1997: Hitt, 1998: Janvier, 1987b: Janvier, 1987c: Janvier, 1998: Mesquita, 1998).

4. Έρευνες που διερευνούν τις αναπαραστάσεις και την αλλαγή πεδίου αναπαράστασης (Duval, 1987: Janvier, 1987a: Janvier, 1987b: Lesh, Behr & Post, 1987: Lesh, Post & Behr, 1987: Ασβεστά & Γαγάτσης, 1995: Γαγάτσης, Κυριακίδης, Μιχαηλίδου & Σιακαλλή, 2000: Γαγάτσης & Μουγή, 2000: Γαγάτσης & Παναούρα, 2000).

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε κάποιες σχετικές έρευνες από τη διεθνή και την ελληνική βιβλιογραφία.

3.2.1. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Επειδή θα αναφερθούμε αρχικά στις έρευνες αυτές που συσχετίζουν τις αναπαραστάσεις με την επίλυση προβλήματος, θεωρούμε ότι πρέπει να πούμε πρώτα μερικά λόγια για τους όρους ‘πρόβλημα’ και ‘επίλυση προβλήματος’.

Οι όροι επιδέχονται πολλαπλές ερμηνείες. Πάντως με κάποιες επουσιώδεις παραλλαγές οι περισσότεροι ειδικοί, π.χ. Schoenfeld (1987) και Reys et al. (1989) συμφωνούν ότι ένα «πρόβλημα αναφέρεται σε μια κατάσταση στην οποία ένα άτομο αναζητά κάτι ή θέτει ένα στόχο και δεν γνωρίζει αμέσως την πορεία που θα ακολουθήσει για την ανεύρεση ή την επίτευξή του». (Ι. Ηλία και Α. Γαγάτσης, 2004).

Η αξία πάντως του προβλήματος στη μάθηση στα μαθηματικά αλλά και σε όλους τους επιστημονικούς τομείς θεωρείται αδιαμφισβήτητη. Ο Hilbert (1902) θεωρεί ότι κάθε κλάδος της επιστήμης παραμένει ζωντανός εφόσον εξακολουθεί να προσφέρει αφθονία προβλημάτων, ενώ πιθανή απουσία τους μπορεί να προβλέψει την εξαφάνιση της ανθρώπινης ανάπτυξης.(Hilbert, D., 1902).

Τα μαθηματικά κατείχαν σημαντική θέση στα μαθηματικά αρχαίων πολιτισμών, όπως των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων, των Κινέζων και των Ελλήνων, και αποτέλεσαν την αφετηρία ανάπτυξης σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών π.χ. Γεωμετρία, Άλγεβρα, Θεωρία αριθμών, Στατιστική κλπ.

Επιπρόσθετα τα μαθηματικά προβλήματα αποτελούσαν ανέκαθεν ένα σημαντικό μέρος των σχολικών μαθηματικών (Stanic & Kilpatrick, 1989)

Στα μαθηματικά παρατηρείται σύγχυση μεταξύ άσκησης και προβλήματος. Ο Polya προβαίνει σε διάκριση ανάμεσα σε προβλήματα ρουτίνας και σε πρωτότυπα προβλήματα.(Polya, G., 1957). Ένα επεισόδιο επίλυσης προβλήματος μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μικρό μοντέλο μιας διαδικασίας μάθησης, το οποίο εμπλέκει γνωστικούς, μεταγνωστικούς και συναισθηματικούς παράγοντες. Στη διαδικασία αυτήν εμπλέκονται τρεις κατηγορίες ανεξάρτητων μεταβλητών ˙ αυτές που σχετίζονται: α) με το **άτομο** που επιλύει το πρόβλημα, β) με το **έργο** προς επίλυση και γ) με το **περιβάλλον** μέσα στο οποίο επιτελείται το έργο (Kilpatrick, 1975, στο Kulm, 1984).

Οι μεταβλητές που επηρεάζουν την επίλυση προβλήματος και αναφέρονται στο άτομο διακρίνονται στις παρακάτω κατηγορίες:

Α) Σταθερές εξωτερικές μεταβλητές που σχετίζονται με τα προσωπικά χαρακτηριστικά του υποκειμένου όπως η ηλικία και το φύλλο.

Β) Μεταβλητές που μπορούν να τροποποιηθούν από διαδικασίες όπως η διδασκαλία. Σε αυτές περιλαμβάνονται οι γνώσεις του υποκειμένου (π.χ. οι τρόποι αναπαράστασης μιας μαθηματικής έννοιας), οι μεταγνώσεις (π.χ. ο καθορισμός στόχων, η αυτοαξιολόγηση) και οι πεποιθήσεις και τα συναισθήματά του (π.χ. ενδιαφέρον, πεποιθήσεις για την ικανότητά του ως λύτη προβλημάτων).

Γ) Μεταβλητές που αναφέρονται στο εκπαιδευτικό υπόβαθρο του υποκειμένου (π.χ. είδος σχολείου που φοιτά).

Οι μεταβλητές που επηρεάζουν το έργο (επίλυση προβλήματος) είναι οι ακόλουθες:

Α) Το περιεχόμενο του προβλήματος, το οποίο έχει να κάνει με τις μαθηματικές έννοιες που περιέχονται στο πρόβλημα (π.χ. κλάσματα, συναρτήσεις)

Β) Το πλαίσιο του προβλήματος, δηλ τα μη μαθηματικά στοιχεία του. Σχετίζεται με το συγκείμενο γύρω από το οποίο οικοδομείται το πρόβλημα.

Γ) Η σύνταξη του προβλήματος, που σχετίζεται με τη διάταξη των λέξεων και των συμβόλων στο πρόβλημα.

Δ) Η δομή του προβλήματος, που αναφέρεται στις μαθηματικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του προβλήματος και στις μαθηματικές πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του.

Τέλος, η επίδραση των μεταβλητών περιβάλλοντος, οι οποίες σχετίζονται με το φυσικό, κοινωνικό και ψυχολογικό πλαίσιο μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η συγκεκριμένη διαδικασία, θεωρείται ως ιδιαίτερα σημαντική. Σε αυτή τη κατηγορία συμπεριλαμβάνεται και η διδασκαλία, που κρίνεται ως η πιο σημαντική συνιστώσα στην επίλυση προβλήματος, αφού μπορεί να αναπτύξει ή να παρεμποδίσει την ικανότητα λύσης του υποκειμένου.

Οι Lesh, Post και Behr (1987) εξετάζουν το ρόλο που διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις στη μάθηση των Μαθηματικών και στην επίλυση προβλήματος. Δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στις μεταφράσεις από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο και στους μετασχηματισμούς μέσα στο ίδιο το σύστημα και επισημαίνουν ότι οι μεταφράσεις και οι μετασχηματισμοί βρίσκονται σε σχέση αλληλεξάρτησης. Από την έρευνά τους συνάγουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Οι μαθητές της Δ΄ Δημοτικού και της Β΄ Γυμνασίου αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες στην κατανόηση λεκτικών προβλημάτων και γραπτών υπολογισμών.
- Επιπλέον δυσκολεύονται στην κατανόηση των μοντέλων και της γλώσσας που απαιτείται για την αναπαράσταση και χειρισμό των μαθηματικών εννοιών που περιέχονται στα προβλήματα.
- Ακόμη οι δυσκολίες μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο και οι μετασχηματισμοί μέσα στο ίδιο το σύστημα αποτελούν σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν τη μάθηση των Μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος. Θεωρούν δε ότι η υπερπήδηση των δυσκολιών αυτών θα διευκολύνει την απόκτηση και τη χρήση στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών.
- Ως προς την ίδια τη φύση της πράξης της αναπαράστασης συμπεραίνουν ότι τείνει να είναι μια πλουραλιστική, ασταθής και συνεχώς αναπτυσσόμενη διαδικασία.
- Οι μαθητές, κατά την επίλυση προβλήματος, συχνά χρησιμοποιούν διάφορα συστήματα αναπαράστασης που το καθένα αναπαριστά μέρος της δοσμένης κατάστασης, ενώ οι λύσεις αποτελούνται από πολλές επιμέρους μεταφράσεις από μέρη της δοσμένης κατάστασης σε μέρη διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης.
- Οι καλοί λύτες προβλημάτων είναι ευέλικτοι και χρησιμοποιούν ποικιλία αναπαραστάσεων επιλέγοντας κάθε φορά τις καταλληλότερες αναπαραστάσεις για το συγκεκριμένο τμήμα της κατάστασης του προβλήματος.

Στην έρευνα αυτή εξετάζονται οι ρητοί αριθμοί και οι αναλογίες σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής τους και επισημαίνεται ο βοηθητικός ρόλος που επιτελούν η προφορική γλώσσα και τα χειριστικά μοντέλα στην επίλυση προβλήματος και στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης και της έννοιας των ρητών αριθμών. Διαπιστώνεται ότι υπάρχει σχέση ανάμεσα στο βαθμό κατανόησης της έννοιας των ρητών αριθμών και στην ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαραστάσεων στο άλλο και μετασχηματισμών μέσα στο ίδιο σύστημα. Ακόμη ως προς το επίπεδο δυσκολίας ενός προβλήματος φαίνεται ότι σημαντικό ρόλο διαδραματίζουν όχι μόνο η υποκείμενη μαθηματική δομή και το πόσο συγκεκριμένο είναι το έργο , αλλά και τα χαρακτηριστικά των συστημάτων αναπαράστασης μέσα στο πλαίσιο των οποίων παρουσιάζεται η μαθηματική δομή.

Οι Γαγάτσης και Μουγή σε έρευνά τους (2000) προσπαθούν να απαντήσουν στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα που σχετίζονται με την επίλυση προβλήματος: α) Υπάρχει κάποιο είδος αναπαράστασης στα Μαθηματικά που οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται πιο αποτελεσματικά; β) Υπάρχει κάποιο είδος μετάφρασης που ευνοείται; γ) Είναι ικανά τα παιδιά της ΣΤ΄ Δημοτικού να χρησιμοποιούν, να ερμηνεύουν και να διατυπώνουν συμβολικές αναπαραστάσεις;
Οι απαντήσεις που φαίνεται ότι προκύπτουν από την παραπάνω έρευνα για τα παραπάνω ερωτήματα είναι αντιστοίχως οι εξής:
α) οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται πιο αποτελεσματικά τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση, ενώ παρουσιάζονται δυσκολίες στο χειρισμό λεκτικών εκφράσεων.
β) το είδος μετάφρασης που ευνοείται είναι η μετάφραση από συμβολική σε λεκτική έκφραση και αντίστροφα.
γ) ως προς την ικανότητα των παιδιών να χρησιμοποιούν, να ερμηνεύουν και να διατυπώνουν συμβολικές αναπαραστάσεις τα αποτελέσματα χαρακτηρίζονται ως ενθαρρυντικά.

3.2.2. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Ο Janvier (1987c) ερευνά τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του κύκλου και επισημαίνει το σημαντικό ρόλο που παίζουν αυτές στις διαδικασίες μετάφρασης και στη μαθηματική σκέψη. Θεωρεί ότι αυτές πρέπει να διαγνωστούν και να αξιοποιηθούν αφού αποτελούν τη βασική γνώση για τις τυπικές μαθηματικές έννοιες, οι οποίες θα συστηματοποιηθούν και θα τυποποιηθούν με τη διδασκαλία.

Οι Anastasiadou S. & Gagatsis (MASSEE International Congress on Mathematics, 2006) σε εργασία τους διερευνούν το ρόλο των αναπαραστάσεων στην κατανόηση και μάθηση της στατιστικής σε μαθητές πέμπτης Δημοτικού στην Ελλάδα. Πιο συγκεκριμένα προσπάθησαν να διερευνήσουν την ικανότητα των μαθητών να μεταφράζουν αναπαραστάσεις (λεκτικές, πίνακες, γραφικές και συμβολικούς τύπους) στατιστικών εννοιών από τον ένα τύπο στον άλλο και να αναγνωρίζουν τους προτιμότερους τύπους αναπαράστασης και μετάφρασης.
Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές δεν αντιμετωπίζουν τις ίδιες δυσκολίες για τους διάφορους τύπους στατιστικών αναπαραστάσεων και έτσι χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διδασκαλία.
Τα ευρήματα υποστηρίζουν τη θέση ότι όλοι οι τύποι στατιστικών αναπαραστάσεων πρέπει να διασυνδέονται μεταξύ τους κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και της μάθησης στατιστικών εννοιών.

Οι Ηλία και Γαγάτσης (2004) εξετάζουν το ρόλο της αναγνωστικής και της μαθηματικής ικανότητας , καθώς και της εφαρμογής στρατηγικών

αναπαράστασης (Θεωρία Διπλής Κωδικοποίησης , Paivio,1990) στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων προσθετικής δομής με τη μορφή πληροφοριακής εικόνας.
Τα αποτελέσματα έδειξαν:

- Την απουσία σημαντικής επίδρασης της αναγνωστικής και της μαθηματικής ικανότητας στην επίλυση προβλημάτων, όταν λαμβάνονταν υπόψη οι επιδράσεις των στρατηγικών

- αναπαράστασης, εφόσον οι τελευταίες είχαν διαμεσολαβητικό ρόλο.
- Διαπιστώθηκε επίσης ότι καθεμιά από τις στρατηγικές αναπαράστασης συμβάλλει με έναν ιδιαίτερο τρόπο στην επίλυση προβλήματος.
- Ότι οι αναπαραστάσεις των μαθητών ποικίλουν με βάση τις ικανότητές τους, τη δομή των προβλημάτων προς επίλυση και τις δεξιότητες χρήσης στρατηγικών αναπαράστασης που έχουν αναπτύξει.

Οι Γαγάτσης και Δεληγιάννη ερευνούν το ρόλο της εικόνας και της αριθμητικής γραμμής στην επίλυση αριθμητικών προβλημάτων των τεσσάρων πράξεων σε μαθητές δημοτικού σχολείου.
Οι αλληλοσυγκρουόμενες απόψεις της επιστημονικής κοινότητας για βοηθητική χρήση των οπτικών αναπαραστάσεων στο έργο των μαθηματικών από τη μια και ειδικότερα για την επίλυση προβλήματος, όπου κάποιοι (Hadamard (1945), Poincare (1963), Polya (1945)) υποστηρίζουν ότι οι οπτικές αναπαραστάσεις αποτελούν απαραίτητο στοιχείο, και από την άλλη οι θέσεις άλλων ερευνητών, όπως η Presmeg (1992), που ισχυρίζονται ότι η χρήση τους μπορεί να ωθήσει το λύτη να εστιάσει την προσοχή του σε περιττές λεπτομέρειες και όχι στα κύρια συστατικά στοιχεία του προβλήματος, παρακίνησαν τους ερευνητές στη διεξαγωγή της έρευνας αυτής.
Το θεωρητικό πλαίσιο, στο οποίο στηρίχτηκαν, αποτελούν οι μελέτες λειτουργίας της εικόνας των Carney & Levin (2002) και η πρότασή τους για τα παρακάτω είδη εικόνων, σε σχέση με τη λειτουργία που κατέχουν στην επεξεργασία κειμένων:

α) Διακοσμητικές εικόνες, οι οποίες αποτελούν καθαρά διακοσμητικό στοιχείο σε ένα πρόβλημα χωρίς να παρέχουν καμιά πληροφορία για την επίλυσή του.

β) Οργανωτικές εικόνες, οι οποίες παρέχουν κατευθυντήριες γραμμές και ένα πλαίσιο εργασίας στους μαθητές καθοδηγώντας τους να γράψουν ή να σχεδιάσουν κάτι που θα λειτουργήσει επικουρικά προς την κατεύθυνση επίλυσης του προβλήματος, χωρίς όμως να είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθεί για τη λύση.

γ) Βοηθητικές- αναπαραστατικές, στις οποίες περιλαμβάνεται ολόκληρο ή μέρος του περιεχομένου του προβλήματος και η εικόνα μπορεί να διευκολύνει τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή του.

δ) Πληροφοριακές εικόνες, οι οποίες παρέχουν όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για την επίλυση ενός προβλήματος και η χρήση τους αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επίλυσή του.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής καταλήγουν στο ότι:

- Οι διακοσμητικές και οι βοηθητικές- αναπαραστατικές εικόνες δεν επηρεάζουν τη συμπεριφορά των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων όλων των αριθμητικών πράξεων,
- Ενώ η παρουσία πληροφοριακών εικόνων και αριθμητικής γραμμής περισσότερο συγχύζει αντί να διευκολύνει.
- Οι οργανωτικές όμως εικόνες έχουν ως επί το πλείστον θετική επίδραση.
- Από την άλλη, η θέση του αγνώστου αλλά και η μαθηματική δομή επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών, υπερισχύοντας του είδους της εικόνας.

4. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΑΥΤΗΣ

4.1. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η συνάρτηση αποτελεί κεντρική έννοια των μαθηματικών επιστημών και των εφαρμογών τους και αυξάνεται από τη γενική τάση του ανθρώπου να συνδέει δύο ποσότητες (Evangelidou, A. et al). Αυτή η συσχέτιση μεταξύ δύο ποσοτήτων, που ξεκίνησε από πρακτικές εφαρμογές της ιστορικής αρχαιότητας, ακολούθησε μια μακρόχρονη και περίπλοκη πορεία μέχρι να κατασταλάξει στη σύγχρονη έννοια της συνάρτησης.

Η έννοια της συνάρτησης, εμφανίζεται από την απαρχή των μαθηματικών. Σε Βαβυλωνιακά κείμενα βρίσκουμε αντιστοιχίσεις τιμών μεταξύ δύο μεγεθών π.χ. ημερομηνίας και γωνιακών θέσεων πλανητών (Katz,1993) καθώς και πίνακες τετραγώνων και κύβων και κατ’επέκταση τετραγωνικών και κυβικών ριζών καθώς και αντίστροφων φυσικών αριθμών (B.L.VAN DER WAERDEN).

Η ιδέα του λόγου δύο μεγεθών στα Ελληνικά μαθηματικά, η οποία απετέλεσε ένα εργαλείο σύγκρισης των εμπλεκόμενων μεγεθών, όπως η σχέση της διαμέτρου και της περιφέρειας του κύκλου, αποτελεί πρώιμες μορφές συναρτησιακού συσχετισμού.

Αργότερα, στην Αλμαγέστη, βρίσκουμε τους πίνακες του **Κλαύδιου Πτολεμαίου**. Στο έργο αυτό κεντρική θέση κατέχει ο πίνακας χορδών, ο οποίος δίνει τα μήκη όλων των χορδών ενός κύκλου, ακτίνας R=60, συναρτήσει της επίκεντρης γωνίας θ, και ανά 0,5 της μοίρας (σχέση δηλαδή της μορφής : χορδή(θ)= 120ημ($\theta/2$),).

Ο πίνακας αυτός, που πιθανολογείται ότι είναι έργο του Ίππαρχου, προγενέστερου του Πτολεμαίου, ουσιαστικά είναι και ένας πίνακας ημιτόνων σε κύκλο ακτίνας R=60.

Θα ήταν υπερβολικό να ισχυριστούμε ότι οι Βαβυλώνιοι ή οι Έλληνες είχαν κατά νου την έννοια της συνάρτησης. Όμως αν αντιληφθούμε την έννοια της συνάρτησης όχι ως αλγεβρικό τύπο, αλλά ως μια γενικότερη σχέση που αντιστοιχεί τα στοιχεία ενός συνόλου αριθμών με τα στοιχεία ενός άλλου συνόλου ή ως αντίληψη μιας γενικότερης έννοιας αντιστοιχίας τιμών δύο μεγεθών, τότε θα μπορούσαμε να συμφωνήσουμε με τον ισχυρισμό του Ο Petersen ότι οι συναρτήσεις βρίθουν στο έργο του Κλαύδιου Πτολεμαίου.

Με την έννοια της συνάρτησης να είναι απούσα από τα αρχαία μαθηματικά , φτάνουμε στο 1350, όπου ο **Όρεσμος** (Nicole Oresme**)**, σύμφωνα με τον Youschkevitch, περιγράφοντας τους νόμους της φύσης, περιγράφει γραφικά την εξάρτηση της ταχύτητας και του χρόνου, μίλησε δηλ. για εξάρτηση μιας ποσότητας από μια άλλη. Η αναφορά του στην έννοια της συνάρτησης δηλώνει ότι οι ποσοτικοί φυσικοί νόμοι μπορούν να περιγραφούν μέσω συναρτησιακής σχέσης, όπου υπάρχει ενσυνείδητη διάκριση μεταξύ εξαρτημένων και ανεξάρτητων μεταβλητών. Επίσης ότι η συναρτησιακή σχέση μπορεί να παρασταθεί γραφικά.

Αργότερα, τον 17^o αιώνα, ο **Γαλιλαίος** αρχίζει να αντιλαμβάνεται την έννοια της συνάρτησης πιο ξεκάθαρα, γεγονός που φαίνεται από τις μελέτες του στην κίνηση, όπου υπάρχει σαφής κατανόηση μιας σχέσης μεταξύ μεταβλητών.

Όμως δεν σταματάει εκεί αλλά προχωράει ακόμα πιο πέρα κάνοντας μια αντιστοιχία μεταξύ των σημείων δύο ομόκεντρων κύκλων κέντρου Ο. Ονομάζοντας Α τον μεγαλύτερο με διάμετρο διπλάσια του μικρότερου κύκλου Β και λαμβάνοντας ένα σημείο P στον Α διαπίστωσε ότι η ημιευθεία ΟP τέμνει τον κύκλο Β σε ένα μόνο σημείο. Αλλά ακολουθώντας και την αντίστροφη πορεία, λαμβάνοντας δηλ. ένα σημείο Q στον Β διαπίστωσε ότι η ημιευθεία ΟQ τέμνει τον κύκλο Α σε ένα μόνο σημείο.

Βλέπουμε δηλ. ότι αρχικά κατασκεύασε μια συνάρτηση που απεικόνιζε κάθε σημείο του κύκλου Α σε ένα μόνο σημείο του κύκλου Β και μετά κάθε σημείο του κύκλου Β σε ένα μόνο σημείο του κύκλου Α

Κατασκεύασε λοιπόν μια “1-1” συνάρτηση μεταξύ των σημείων των δύο κύκλων.

Ο ίδιος κατασκεύασε και την “1-1” αντιστοιχία μεταξύ των θετικών ακεραίων και των τετραγώνων τους.

Το χαρακτηριστικό της περιόδου αυτής είναι ότι ο ορθολογισμός των αρχαίων Ελλήνων, μετατρέπεται σε ρασιοναλισμό δηλ. ο λόγος των αρχαίων Ελλήνων μετατρέπεται σε ratio, σε υπολογιστική δηλ. σχέση με αριθμητικό αποτέλεσμα, ως συνέπεια της επικρατούσας στάσης που αντικρίζει τον κόσμο από την άποψη του ωφέλιμου αποτελέσματος και της χρησιμοθηρικής εκμετάλλευσης. Ταυτόχρονα μπαίνει η διάσταση του χρόνου στις μετρήσεις, ως ομογενούς μεγέθους, ξεπερνώντας τα επιστημολογικά εμπόδια των αρχαίων Ελλήνων, και γίνεται μαθηματική μελέτη της κίνησης.

Σχεδόν ταυτόχρονα με τον Γαλιλαίο, ο **Καρτέσιος** (Descartes), εισάγοντας την άλγεβρα στη γεωμετρία αναφέρει, στο La Geometrie, ότι μια καμπύλη μπορεί να σχεδιαστεί αφήνοντας γραμμές να πάρουν διαδοχικά άπειρο πλήθος διαδοχικών τιμών. Εδώ ξαναεμφανίζεται η έννοια της συνάρτησης στην κατασκευή μιας καμπύλης αφού ο Καρτέσιος αντιλαμβάνεται μια αλγεβρική έκφραση με όρους μεγέθους, το οποίο λαμβάνει απειρία τιμών καθώς ένα μέγεθος, από το οποίο αποτελείται αυτό, λαμβάνει απειρία τιμών. Ο Καρτέσιος είναι ο πρώτος

που ξέφυγε από τη στατική αλγεβρική παράσταση μιας εξίσωσης και μελέτησε τη μεταβολή που υφίστανται τα μεγέθη όταν κάποια από τις επιμέρους ποσότητες λαμβάνει διαδοχικά διαφορετικές τιμές σε ένα συνεχές διάστημα.

Ο όρος *συνάρτηση* , σύμφωνα με τον F. Cajori (a history of mathematics, Chelsea, N.Y.), χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον **Gottfried Leibniz** το 1692. Σύμφωνα με τον da Ponte (1992), χρησιμοποιήθηκε για να περιγράψει μια ποσότητα που σχετίζεται με μια καμπύλη, όπως η κλίση μιας καμπύλης σε ένα συγκεκριμένο σημείο της. Οι συναρτήσεις που θεώρησε ο Leibniz είναι αυτές που σήμερα λέμε διαφορίσιμες συναρτήσεις.

Το 1694 ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε από τον **Jacob Bernoulli** με την έννοια που τον χρησιμοποίησε ο Leibniz, ενώ το 1718 ο **John Bernoulli** όρισε τη συνάρτηση ως μια ‘*ποσότητα αποτελούμενη κατά οποιονδήποτε τρόπο από μια μεταβλητή και σταθερές’*.

Στα μέσα του 18^{ου} αιώνα η έννοια της συνάρτησης αρχίζει να παίζει κεντρικό ρόλο στα μαθηματικά. Ο συμβολισμός f(x), που χρησιμοποιούμε σήμερα, εισήχθη από τον **Leonhard Euler** το 1734 (από το function δηλ. λειτουργία ή διαδικασία).

Ο όρος συνάρτηση ορίστηκε απ’ αυτόν στο βιβλίο του *Introductio in analysin infinitorum* (1747) ως εξής: ‘Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που συνθέτει με οποιονδήποτε τρόπο μια μεταβλητή και αριθμούς ή σταθερές ποσότητες’. (Katz,1993) Με τον όρο ‘αναλυτική έκφραση’ του χ, εννοεί μια έκφραση που εμπεριέχει π.χ. δυνάμεις, λογαρίθμους, τριγωνομετρικές συναρτήσεις κ.α. Ουσιαστικά, η περιγραφή της συνάρτησης που δίνεται έχει να κάνει με την ύπαρξη ενός μοναδικού τύπου με τον οποίο αναπαρίσταται αυτή. Αξίζει να σημειώσουμε στους προηγούμενους ορισμούς την ιδέα της μεταβλητής.

Στο βιβλίο αυτό ο Euler ‘βλέπει’ τις τριγωνομετρικές ποσότητες ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, κ.α. όχι απλά ως γραμμές συνδεδεμένες με τον κύκλο, αλλά ως συναρτήσεις.

Μιλάει για συνεχείς, μεικτές και ασυνεχείς συναρτήσεις. Ως συνεχείς ορίζει τις συναρτήσεις που εκφράζονται από μια αναλυτική έκφραση, ως μεικτές αυτές που εκφράζονται από περισσότερες από μια αναλυτικές εκφράσεις και ως ασυνεχείς όλες τις υπόλοιπες τις οποίες αργότερα τις όρισε ως τις συναρτήσεις των οποίων η καμπύλη σχεδιάζεται αυθαίρετα με το χέρι. Βλέπουμε δηλ. ότι ο όρος συνάρτηση χρησιμοποιείται από τον L. Euler για να εκφράσει επιπλέον τη σχέση μεταξύ ενός χ και ενός y, που εκφράζονται σε ένα επίπεδο χy από μια οποιαδήποτε καμπύλη ‘ελεύθερα σχεδιασμένη’.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η έννοια της συνάρτησης, όπως εμφανίζεται την περίοδο αυτή, ως ένας αλγεβρικός τύπος, συνδέεται άμεσα με καμπύλες του επιπέδου.

Η μαθηματική εμπειρία της έρευνας των φυσικών χορδών από τον L. Euler που ακολουθεί και η έρευνα σε άλλα μαθηματικά αντικείμενα, όπως η ανάπτυξη δυναμοσειρών από τον Lagrange, δημιουργεί την τάση εξάλειψης της έννοιας της μεταβλητής και αποφυγής κάθε ειδικής αναφοράς.

Το 1755, στο έργο του *Institutiones calculi differentialis* ο **Leonhard Euler,** προσπαθώντας να υπερβεί την έννοια της μεταβλητής και της σταθεράς που εκείνη την εποχή ήταν εκτατά συνήθως γεωμετρικά μεγέθη κατά τη μελέτη καμπυλών (τετμημένες, τεταγμένες κ.λ.π.), δίνει ένα γενικότερο ορισμό της συνάρτησης, πλησιέστερο προς αυτόν που χρησιμοποιούμε σήμερα: ‘αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται έτσι από άλλες ποσότητες, ώστε αν οι τελευταίες αλλάζουν οι πρώτες υφίστανται αλλαγή, τότε οι πρώτες ποσότητες λέγονται συναρτήσεις των τελευταίων’. Ο ορισμός αυτός εφαρμόζεται μάλλον ευρέως και συμπεριλαμβάνει όλους τους τρόπους με τους οποίους μια ποσότητα μπορεί να προσδιοριστεί από άλλη. Αν λοιπόν το χ συμβολίζει μια μεταβλητή ποσότητα τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το χ κατά οποιονδήποτε τρόπο ή υπολογίζονται από αυτό, λέγονται συναρτήσεις του χ ’.

Παρά τον γενικευμένο ορισμό που έδωσε όμως ο L. Euler, στο έργο του που ακολουθεί, χρησιμοποιεί μόνο αναλυτικές συναρτήσεις.

Αυτό που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι ο Euler **δεν είχε ξεκαθαρίσει τη διαφορά μεταξύ της έννοιας μιας συνάρτησης και της (αλγεβρικής) αναπαράστασής της.**

Το 1780 αρχίζουν να εμφανίζονται προβλήματα σχετικά με τις κατηγορίες συναρτήσεων που είχε περιγράψει, καθώς μια μεικτή συνάρτηση σε ορισμένες περιπτώσεις θα μπορούσε να δοθεί από μια μόνο αναλυτική έκφραση. Σαφές παράδειγμα αυτού δόθηκε από τον Cauchy (το 1844) όταν αυτός παρατήρησε ότι η συνάρτηση $y = x$ για $x \geq 0$, και $y = -x$ για $x < 0$ μπορεί να εκφραστεί από μια μόνο αναλυτική έκφραση την y = $\sqrt{x^2}$. Έτσι ο διαχωρισμός των συναρτήσεων σε συνεχείς και μεικτές δεν είχε νόημα.

Αργότερα, το 1797, ο Lacroix έγραψε: ‘Κάθε ποσότητα, της οποίας οι τιμές εξαρτώνται από μια ή περισσότερες άλλες ποσότητες , λέγεται συνάρτηση των τελευταίων άσχετα με το αν γνωρίζουμε ή όχι τι πράξεις χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε για να φτάσουμε από τις τελευταίες στην πρώτη’.

Ο **Cauchy** το 1821 στο *Cours d'anlyse* έδωσε τον παρακάτω ορισμό για τη συνάρτηση :‘Αν μεταβλητές ποσότητες συνδέονται έτσι μεταξύ τους, ώστε από την τιμή μιας δοθείσας να μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές όλων των άλλων, τότε εννοούμε ότι αυτές οι μεταβλητές ποσότητες μπορούν να εκφρασθούν μέσω μιας από αυτές, η οποία τότε ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή · και οι άλλες ποσότητες εκφρασμένες μέσω της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι αυτές που καλούμε συναρτήσεις της μεταβλητής αυτής’. Παρά όμως το γενικευμένο του ορισμού του, ο Cauchy εξακολουθεί να σκέφτεται τη συνάρτηση σε όρους τύπου και αναλυτικών εκφράσεων.

Οι πρώτες αυτές προσεγγίσεις της έννοιας της συνάρτησης κρύβουν μια σημαντική επιστημολογική διάσταση. Η συνάρτηση, στη μαθηματική πρακτική, αποτελεί μια ειδική σχέση που προσφέρεται ιδιαίτερα στην εκτίμηση ενός μεγέθους μέσω ενός άλλου μεγέθους με τη βοήθεια της σχέσης αυτής που τα συνδέει. Θα μπορούσαμε δηλ. να ισχυριστούμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζεται ως ένα διαμεσολαβητικό εργαλείο περιγραφής ή και εκτίμησης της τιμής ενός μεγέθους μέσω της τιμής ενός άλλου μεγέθους που είναι άμεσα προσπελάσιμο.

Ο **Fourier**, στο *Théorie analytique de la Chaleur* το 1822, έδωσε τον ακόλουθο ορισμό: ‘Γενικά, η συνάρτηση f(x) αντιπροσωπεύει μια διαδοχή τιμών ή τεταγμένων κάθε μια από τις οποίες είναι αυθαίρετη. Δοθείσης μιας απειρίας τιμών της τετμημένης x, υπάρχει ένας ίσος αριθμός τεταγμένων f(x). Όλες έχουν πραγματικές αριθμητικές τιμές, είτε θετικές είτε αρνητικές είτε μηδέν. Δεν υποθέτουμε αυτές τις τεταγμένες να υπόκεινται σε έναν κοινό νόμο˙ διαδέχονται η μια την άλλη με οποιοδήποτε τρόπο όπως και να είναι, και κάθε μια από αυτές δίνεται σαν να ήταν μια μοναδική (ξεχωριστή) ποσότητα ’. Είναι σαφές ότι ο Fourier έδωσε έναν ορισμό που απομακρύνεται σκόπιμα από τις αναλυτικές εκφράσεις. Εντούτοις, παρά την προσπάθεια αυτή, όταν αρχίζει να αποδεικνύει τα θεωρήματα για την έκφραση μιας αυθαίρετης συνάρτησης ως σειράς Fourier, χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η αυθαίρετη συνάρτησή του είναι συνεχής υπό τη σύγχρονη έννοια!
Ο **Dirichlet**, το 1837, ουσιαστικά δέχτηκε τον ορισμό του Fourier για τη συνάρτηση καταλήγοντας στην έκφραση "η μεταβλητή Y λέγεται ότι είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής X που ορίζεται στο διάστημα a<x<b, εάν σε κάθε αξία της μεταβλητής X σε αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια μόνο αξία της μεταβλητής Y, ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας".

Σε αυτόν τον ορισμό η έννοια της μεταβλητής περιλαμβάνει μια άχρονη καταληπτή εκλογή της αξίας μέσα στο διάστημα των πραγματικών αριθμών, ενώ ανεξαρτητοποιείται οποιαδήποτε εποπτική διάσταση. Επιπλέον εμφανίζεται σαφώς και το μονοσήμαντο της τιμής y.

Αμέσως μετά έδωσε και τον ορισμό της συνεχούς συνάρτησης (χρησιμοποίηση του όρου συνεχής υπό τη σύγχρονη έννοια). Ο Dirichlet έδωσε επίσης ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης ορισμένης στο διάστημα [0, 1] που είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο, δηλαδή της f(x) να ορίζεται ως 0 εάν ο x είναι ρητός και 1 εάν ο x είναι άρρητος.

Το 1838 **Lobachevsky** έδωσε έναν ορισμό μιας γενικής συνάρτησης, την οποία απαιτούσε ακόμα να είναι συνεχής: ‘ Μια συνάρτηση του x είναι ένας αριθμός που δίνεται για κάθε x και που αλλάζει βαθμιαία μαζί με το x. Η τιμή της συνάρτησης θα μπορούσε να δοθεί είτε από μια αναλυτική έκφραση είτε από μια συνθήκη που προσφέρει τα μέσα (τον τρόπο) για έλεγχο όλων των αριθμών και επιλογή ενός από αυτούς, ή τελικά η εξάρτηση μπορεί να υπάρχει αλλά να παραμένει άγνωστη’.

Βεβαίως η παντού ασυνεχής συνάρτηση του Dirichlet δεν θα είναι συνάρτηση σύμφωνα με τον ορισμό του Lobachevsky. Ο Hankel, το 1870, αποδοκίμασε με λύπη τη σύγχυση που βασίλευε ακόμα στην έννοια της συνάρτησης : « Ένα άτομο ορίζει τις συναρτήσεις ουσιαστικά υπό την έννοια του Euler, άλλο απαιτεί ότι το y πρέπει να αλλάξει με το x σύμφωνα με έναν νόμο, χωρίς δόσιμο μιας εξήγησης αυτής της σκοτεινής (ασαφούς) έννοιας, το τρίτο την ορίζει με τον τρόπο του Dirichlet, το τέταρτο δεν την ορίζει καθόλου. Εντούτοις, καθένας συνάγει από τη σκοπιά του συμπεράσματα που δεν περιέχονται σε αυτήν».

Προς το τέλος του 19ου αιώνα, οι μαθηματικοί άρχισαν να τυποποιούν όλα τα μαθηματικά χρησιμοποιώντας την συνολοθεωρία, και επιδίωξαν να καθορίσουν κάθε μαθηματικό αντικείμενο ως σύνολο. Ο **Hardy** (1908, Σ. 26-28) όρισε μια συνάρτηση ως σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών x και y έτσι ώστε ‘σε μερικές τιμές του x αντιστοιχούν οπωσδήποτε τιμές του y’. Δεν απαίτησε τη συνάρτηση να ορίζεται για όλες τις τιμές του x, ούτε να συνδέεται κάθε τιμή του x με μια μοναδική τιμή του y. Αυτός ο ευρύς ορισμός μιας συνάρτησης καλύπτει περισσότερες σχέσεις από αυτές που συνήθως θεωρούνται συναρτήσεις στα σύγχρονα μαθηματικά.

Ο **Goursat**, το 1923, έδωσε τον ορισμό που εμφανίζεται στα περισσότερα εγχειρίδια σήμερα: ‘Λέμε ότι το y είναι μια συνάρτηση του x εάν σε μια τιμή του x αντιστοιχεί μια τιμή του y. Αυτήν την αντιστοιχία την δείχνουμε με την εξίσωση y=f(x)’. Ο ορισμός αυτός δεν είναι αρκετά ακριβής και περιλαμβάνει τις απροσδιόριστες έννοιες όπως «τιμή» και «αντιστοιχεί».

Ο **Patrick Suppes**, το 1960, έδωσε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός. Το A είναι μια σχέση $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = (y, z))$. $y\, A\, z$ αν $(y, z) \in A$.

Ορισμός. Η f είναι μια συνάρτηση $\Leftrightarrow$ η f είναι σχέση και $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$ $(x\, f\, y$ και $x\, f\, z \Rightarrow y = z)$. Βλέπουμε δηλ. ότι η συνάρτηση, σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν, είναι μια ειδική περίπτωση σχέσης στην οποία κάθε πρώτο στοιχείο έχει ένα μοναδικό δεύτερο στοιχείο.

4.2. ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ

Από την παραπάνω ιστορική και επιστημολογική αναφορά, διαπιστώνουμε ότι η έννοια της συνάρτησης αναπτύχθηκε με την πάροδο των αιώνων, αλλάζοντας το νόημά της και οριζόμενη με μεγαλύτερη ακρίβεια, καθώς τα χρόνια περνούσαν, μέσα από προκύπτουσα μαθηματική εμπειρία, ενώ ‘ο τελικός ορισμός της συνάρτησης κατευθύνθηκε από την ιδέα της διαχείρισης των μοναδικών σχέσεων, που προέκυψε κατά τη διάρκεια του νεώτερων χρόνων από την ανάγκη των υπολογισμών στα πλαίσια της ανάλυσης’.

Συνοψίζοντας λοιπόν, θα μπορούσαμε να συμφωνήσουμε με τους Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., Gagatsis A. στο ότι ‘η συνάρτηση, ως μαθηματική έννοια, είναι μια διανοητική κατασκευή που ενσωματώθηκε μάλλον πρόσφατα στην επιστήμη. Προέκυψε από τη σύνοψη και τη συνάθροιση, της διαφορετικής εμπειρίας και των εννοιολογικών εργαλείων, τα οποία οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες χρησιμοποιούν γενικά για να λύσουν τα προβλήματα και να συγκεντρώσουν τις θεωρίες’.

‘Ακριβώς λόγω αυτής της ιστορικής συμπύκνωσης, η έννοια της συνάρτησης είναι τόσο αφηρημένη που παρουσιάζει πολλές δυσκολίες στη διδακτική μεταφορά της. Οι διαφορετικές επιστημολογικές προσεγγίσεις που οδήγησαν στην έννοια της συνάρτησης μέσω της μακροχρόνιας ιστορικής εξέλιξής της αναστατώνουν στη διδασκαλία τα εγχειρίδια με έναν συγχέοντα τρόπο…. Τα προγράμματα διδασκαλίας ακολουθούν τους διαφορετικούς τρόπους, που εκθέτουν στα παιδιά τα κομμάτια ενός γρίφου που αποτελείται από ένα ασαφές σύνολο αποσπασματικών πληροφοριών, εκμάθηση με απομνημόνευση, απομονωμένα τμήματα που συγχωνεύονται ενδεχομένως σε πανεπιστημιακό επίπεδο. Η Sierpinska (1992) δίνει ένα πολύ καλό παράδειγμα της προσέγγισης αυτής με την παρατήρηση ότι οι τύποι, γραφικές παραστάσεις, διαγράμματα, λεκτικές περιγραφές των σχέσεων, λεκτικές εκφράσεις, συνθέτουν έναν αβέβαιο σχήμα σκέψεων.’

Θεωρείται ως ένα βαθμό αποδεκτό ότι υπάρχει μια αναλογία μεταξύ της ιστορικο-κοινωνικής εξέλιξης των μαθηματικών και της γνωστικής εξέλιξης των μαθητών. Έτσι θα πρέπει να υπάρχει μια αντίστοιχη αναλογία μεταξύ των διδακτικών εμποδίων που λειτουργούν κατά τη διάρκεια του μαθήματος των Μαθηματικών και των επιστημολογικών εμποδίων που λειτούργησαν σε επίπεδο κοινωνίας μια δεδομένη εποχή.

Στην προσπάθειά, λοιπόν, να ξεπεραστούν τα εμπόδια της διδακτικής μεταφοράς της έννοιας της συνάρτησης, ορισμένοι ερευνητές αναζητούν μέσα από την ιστορική μελέτη της έννοιας τα επιστημολογικά εμπόδια και προτείνουν μεθόδους διδασκαλίας με στόχο να ξεπεραστούν αυτά. Η Sierpinska, (1992), για παράδειγμα, σε σχέση με την κατανόηση μιας έννοιας θεωρεί απαραίτητη μια **προκατανόηση** και το σχηματισμό **προεννοιών**. Μιλάει για τέσσερα **νοητικά ενεργήματα** που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (αναγνώριση, διάκριση, γενίκευση και σύνθεση). Στη συνέχεια αναζητά τα διάφορα εμπόδια που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία και τα συσχετίζει με τα επιστημολογικά εμπόδια που είχαν προκύψει κατά την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, προτείνοντας μια πορεία διδασκαλίας που θα τα λαμβάνει υπ’ όψη της και θα δίνει σημασία στο ξεπέρασμά τους. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η αναζήτηση μιας χρονικής μεταβλητής πίσω από την ανεξάρτητη ή την εξαρτημένη μεταβλητή, κάτι το οποίο απετέλεσε ισχυρό επιστημολογικό εμπόδιο, καθώς η μελέτη της κίνησης λειτούργησε αποφασιστικά στην ανάδειξη της έννοιας.

Ο Freudenthal (1983) εισηγείται τη διδασκαλία της έννοιας μέσω των βιωματικών εμφανίσεών της, όπως γλωσσικών μεταφορών, πρακτικών, φυσικών εμπειριών και εφαρμογών. Ο Piaget είχε ερευνήσει, νωρίτερα, την έννοια της συνάρτησης στα πλαίσια της γνωστικής ψυχολογίας και είχε διαπιστώσει ότι οι αρχικές καταβολές της έννοιας υπάρχουν πριν την ηλικία των 7 ετών, ως βιώματα συσχετισμών του τύπου ένα-ένα και πολλά-ένα π.χ. όσο μακρύτερα σπρώξω την μπάλα τόσο μακρύτερα θα πάει ή ένα αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί με πολλούς τρόπους.

Ο Freudenthal, λοιπόν, προτείνει για τη διδασκαλία της έννοιας την στήριξη στο υπάρχον εννοιολογικό υπόστρωμα αξιοποιώντας τις βιωματικές εμπειρίες από τη φύση, όπως την αίσθηση της βαρύτητας, την πρόσληψη της συμμετρίας, της ομοιότητας κ.α.(Lappas & Spyrou, 2003).

4.3. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ο σημαντικός ρόλος που κατέχει η έννοια της συνάρτησης στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών φαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εμφανίζονται στη διεθνή

βιβλιογραφία και επιχειρούν να μελετήσουν πολυδιάστατα την έννοια αυτή.
Θα μπορούσαμε να ταξινομήσουμε τις εργασίες αυτές σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται.

Στην πρώτη κατηγορία υπάγονται οι εργασίες που αναφέρονται στον ορισμό της συνάρτησης και στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας αυτής. Πολλές από τις εργασίες αυτές ασχολούνται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης, όπως αυτές διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους παιδείας
(Dubinsky & Harel, 1992: Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986: Sfard, 1992: Sierpinska, 1992: Vinner & Dreyfus, 1989 κ.α.). Επίσης οι Even (1990: 1993) και Norman (1992) ερευνούν τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης.

Στη δεύτερη κατηγορία υπάγονται οι εργασίες που εξετάζουν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο (Artigue, 1992: Duval, 1987: Even, 1998: Gagatsis, 1997: Hitt, 1998: Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992, Kerslake, 1986).
Έχουμε ήδη αναφέρει ότι μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση ενός βελοδιαγράμματος, ενός πίνακα τιμών, μιας γραφικής παράστασης, μιας αλγεβρικής έκφρασης ή μιας λεκτικής έκφρασης.
Αποτελέσματα ερευνών καταδεικνύουν ότι η μετάφραση από τη μια μορφή αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες τόσο σε μαθητές γυμνασίου, σε μαθητές λυκείου (Gagatsis, 1997: Hitt, 1998: Kerslake, 1986) και σε απόφοιτους λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992) όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artigue, 1992: Even, 1998) αλλά και σε καθηγητές μαθηματικών (Hitt, 1998).
Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου & Οικονόμου μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο που διδάσκεται η έννοια της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπου το πλαίσιο μελέτης της έννοιας αυτής είναι πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου- συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση.
Κάπου εδώ ίσως θα έπρεπε να συμφωνήσουμε με τον F. Hitt ότι ένας βασικός στόχος της διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης πρέπει να είναι η καλλιέργεια της ικανότητας των μαθητών να μεταβαίνουν από τη μια αναπαράσταση στην άλλη χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις.

Σε έρευνά του ο F. Hitt (1998), αναφορικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι καθηγητές μαθηματικών στο συνδυασμό των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης, καταδεικνύει

την ύπαρξη προβλημάτων στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη με διατήρηση του νοήματος.
Μεταξύ των προβλημάτων που διαπίστωσε είναι:

1. Η ταυτόχρονη ύπαρξη της αλγεβρικής έκφρασης μιας καμπύλης, με τη γραφική της αναπαράσταση, προκάλεσε αποδιοργάνωση στην αναγνώριση της με γεωμετρική αιτιολόγηση σχετικά με το αν η καμπύλη αυτή αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.
2. Οι καθηγητές δεν αναγνώρισαν εύκολα το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών από τη γραφική παράσταση συνάρτησης.
3. Δεν προτιμούν τον ορισμό της συνάρτησης που σχετίζεται με την έννοια της μεταβλητής, ενώ προτιμούν τον ορισμό της αντιστοιχίας ή των διατεταγμένων ζευγών.
4. Ενώ δεν δημιουργείται πρόβλημα στην αναγνώριση συνάρτησης, στο πιο πολύπλοκο έργο της κατασκευής συναρτήσεων, το γνωστικό εμπόδιο του περιορισμού σε συνεχείς συναρτήσεις που εκφράζονται από ένα μοναδικό αλγεβρικό τύπο, δεν επιτρέπει στη μεγάλη πλειονότητα των καθηγητών να κατασκευάσουν διαφορετικές συναρτήσεις.
5. Στην περίπτωση που δινόταν μια γραφική παράσταση (που δεν ήταν μια μόνο γραμμή) και εζητείτο φυσική ερμηνεία αναφορικά με διάφορα δοχεία, το σχήμα της γραφικής παράστασης ‘έμοιαζε’ σε μεγάλο ποσοστό με αυτό του δοχείου και αντίστροφα.
6. Η κίνηση ενός αντικειμένου σε κεκλιμένο επίπεδο έκανε κάποιους καθηγητές να σχεδιάσουν σε άξονες χρόνου-ταχύτητας γραφική παράσταση με την ίδια κατεύθυνση της κίνησης. Αυτό δείχνει ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν αναγνωρίζεται και δεν απομονώνεται προκειμένου να τεθεί στο ευρύτερο πλαίσιο μέσα σε μια αναλυτική και μια γραφική αναπαράσταση.
7. Οι καθηγητές έχουν σίγουρη γνώση σχημάτων, αν είναι αναπαραστάσεις συναρτήσεων, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν με τα αντίστοιχά τους σε αλγεβρικό σύστημα. Αυτή η ομάδα καθηγητών σε ασυνήθιστες διδακτικές καταστάσεις δεν κάνει συνεπή συνδυασμό μεταξύ των ποικίλων συστημάτων αναπαράστασης που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης εξαιτίας ποικίλων δυσκολιών.

Η Even (1998) σε έρευνά της εξετάζει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση της συνάρτησης σε άλλη και σε άλλες πτυχές της γνώσης και κατανόησης.
Η έρευνά της πραγματοποιήθηκε σε φοιτητές μαθηματικών και από αυτή προκύπτει ότι η γνώση για τις διάφορες αναπαραστάσεις συνδέεται με τη γνώση για τους διάφορους τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, τη γνώση για το πλαίσιο της παρουσίασης και τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες.

Σχετικά με τους τρόπους προσέγγισης μιας συνάρτησης σε σχέση με τη συμπεριφορά της διακρίνουμε δυο είδη, τον ολιστικό (global) και την προσέγγιση κατά σημεία.
Σε κάποιες περιπτώσεις για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης την αντιμετωπίζουμε ολιστικά, για παράδειγμα όταν πρόκειται να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης που δίνεται η αλγεβρική της έκφραση.
Σε άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιείται η κατά σημεία προσέγγιση. Αυτό συμβαίνει για τη μελέτη συγκεκριμένων σημείων, όπως για παράδειγμα εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας η ευελιξία μετάβασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη συνδέεται με την ευελιξία στη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων όσον αφορά τις συναρτήσεις.
Ένας άλλος παράγοντας που σχετίζεται με το ρόλο που διαδραματίζουν οι αναπαραστάσεις και η μεταξύ τους σύνδεση στην κατανόηση μιας έννοιας έχει να κάνει με το συγκεκριμένο πλαίσιο παρουσίασης του προβλήματος. Δηλαδή, το είδος και η φύση των συναρτήσεων που εξετάζονται καθορίζουν το πόσο και το πώς ο λύτης χειρίζεται τις αναπαραστάσεις ώστε να επιλύσει το πρόβλημα.
Τέλος η ποιότητα της γνώσης για τις υποκείμενες ιδέες των συναρτήσεων που μελετούνται συνδέεται με την ικανότητα μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση στην άλλη.
Στην έρευνά της η Even διαπίστωσε ότι οι φοιτητές αντιμετώπισαν δυσκολίες, όταν κλήθηκαν να συνδέσουν διάφορες αναπαραστάσεις των συναρτήσεων.

Με τον όρο επιστημολογικό- διδακτικό εμπόδιο (Brouseaou, 1997), εννοούμε μια συστηματικά οικοδομημένη γνώση ή αντίληψη, η οποία λειτουργεί κατάλληλα σε ένα σύνολο καταστάσεων και για ορισμένες τιμές των μεταβλητών αυτών των καταστάσεων. Προσπαθώντας να προσαρμοστεί σε άλλες καταστάσεις ή άλλες τιμές των μεταβλητών προκαλεί ειδικά λάθη που μπορούν να παρατηρηθούν και να αναλυθούν. Η ύπαρξή του εμποδίου γίνεται φανερή από το γεγονός ότι χρησιμοποιείται ένα σωστό μοτίβο λύσης σε μια ακατάλληλη περίπτωση. Έχει την ιδιότητα να αντιστέκεται σε καινούριες καταστάσεις και συνεπώς και στη βελτίωση της γνώσης. Το εμπόδιο δεν μπορεί να ξεπεραστεί με μια συνήθη διδασκαλία. Απαιτείται ειδική διδακτική κατάσταση απόρριψης και αυτή η απόρριψη πρέπει να αποτελεί συστατικό στοιχείο της καινούριας γνώσης.
Ο Janvier (1998) αναφέρεται στην έννοια του χρονικού, την οποία θεωρεί ως τη συχνή αιτία λαθών στην ερμηνεία ή την κατασκευή γραφικών παραστάσεων που περιγράφουν τη σχέση ανάμεσα σε δύο μεταβλητές. Θεωρεί ότι το χρονικό λειτουργεί ως επιστημολογικό-διδακτικό εμπόδιο για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης.

Σε έρευνά του ζήτησε από φοιτητές πανεπιστημίου να κατασκευάσουν τη γραφική παράσταση της ταχύτητας ενός αεροπλάνου, που κάνει το ταξίδι Μόντρεαλ- Παρίσι, ως προς τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού, και διαπίστωσε ότι μόνο το 15 % από αυτούς την κατασκεύασε σωστά. Αυτό κατά τον Janvier είναι το χρονικό, θεωρεί δε ότι οι διαδικασίες μετάφρασης και ερμηνείας επηρεάζονται αρνητικά από την έννοια του χρονικού.

Ο Duval (1987 : 1993) σε εργασίες του θεωρεί ότι η αναγνώριση της ισοδυναμίας της σημασίας δύο αναπαραστάσεων φανερώνει μια δραστηριότητα φυσικής ερμηνείας. Η δραστηριότητα της φυσικής μετάφρασης εμποδίζεται από αυτό που ο Duval ονομάζει «σημασιολογική ασυμφωνία » (Duval, 1987).
Με τον όρο σημασιολογική συμφωνία μεταξύ δυο αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας, εννοούμε ότι οι μονάδες πληροφορίας ακολουθούν την ίδια σειρά και στις δυο αναπαραστάσεις, αλλιώς μιλάμε για σημασιολογικά ασύμφωνες αναπαραστάσεις.
Σύμφωνα λοιπόν με το Duval οι δραστηριότητα ερμηνείας μπορεί να είναι άμεση και διαισθητική, στην περίπτωση που οι εκφράσεις είναι σημασιολογικά σύμφωνες. Όταν όμως οι εκφράσεις είναι σημασιολογικά ασύμφωνες η δραστηριότητα αυτή αποτελεί πηγή δυσκολιών ακόμη και αν οι εκφράσεις είναι ισοδύναμες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η σημασιολογική ασυμφωνία καλύπτει τη σημασιολογική ισοδυναμία, η οποία επιτρέπει το απρόσκοπτο πέρασμα από τη μια αναπαράσταση στην άλλη. Μάλιστα ισχυρίζεται ότι η δυσκολία αυτή παραπέμπει σε μια γνωστική διάσταση που είναι ανεξάρτητη από την πολυπλοκότητα της έννοιας που εξετάζεται.

Σε εργασία των Α. Γαγάτση, Π. Σπύρου, Α. Ευαγγελίδου και Ι. Ηλία εξετάζεται η εννοιολογική αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης σε φοιτητές.
Μια από τις κύριες ερευνητικές υποθέσεις της παραπάνω έρευνας ήταν πως δεδομένου ότι η έννοια της συνάρτησης δημιούργησε προβλήματα σε περίφημους μαθηματικούς προηγούμενων εποχών θα πρέπει να ταλαιπωρεί και του σημερινούς φοιτητές.
Το μοντέλο έρευνας που υιοθετήθηκε ήταν το κλασσικό μοντέλο διδακτικής παρέμβασης. Αφού δηλαδή διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των φοιτητών για την έννοια της συνάρτησης, μέσω ερωτηματολογίου (ερωτηματολόγιο Α), έγινε διδασκαλία από δύο καθηγητές ξεχωριστά, δίνοντας έμφαση στις παρανοήσεις και τα εμπόδια που είχαν εντοπιστεί από το ερωτηματολόγιο.
Οι δύο καθηγητές ακολούθησαν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις. Η πρώτη την επαγωγικότητα, δηλαδή την παρουσίαση του ορισμού στο τέλος της διδασκαλίας ενώ η δεύτερη την προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης ως ένα παιχνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης.

Στο τέλος , μέσω ερωτηματολογίου(ερωτηματολόγιο Β), διερευνήθηκαν οι αντιλήψεις των φοιτητών που διαμορφώθηκαν για την έννοια της συνάρτησης μετά τη διδακτική παρέμβαση.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή είναι δύο κατηγοριών. Η πρώτη κατηγορία έχει να κάνει με επιβεβαίωση ήδη γνωστών αποτελεσμάτων από προηγούμενες έρευνες, ενώ η δεύτερη με διατύπωση καινούριων συμπερασμάτων.

Σχετικά με την πρώτη κατηγορία, αναφορικά με απόφοιτους λυκείου, προέκυψαν οι παρακάτω διαπιστώσεις:

- Δεν είναι σε θέση να διατυπώσουν ένα σωστό ορισμό για την έννοια της συνάρτησης.
- Συγχέουν μια οποιαδήποτε σχέση με την έννοια της συνάρτησης.
- Δυσκολεύονται με την ποικιλία αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης.
- Επιβεβαιώθηκαν τα επίπεδα οικοδόμησης της έννοιας της συνάρτησης, όπως περιγράφονται από τον F. Hitt (1998).

Όσον αφορά τη δεύτερη κατηγορία προέκυψαν οι παρακάτω διαπιστώσεις:

- Η στεγανοποίηση που παρατηρήθηκε πριν την παρέμβαση σε έργα μέσα στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης δεν παρατηρήθηκε μετά την παρέμβαση. Το φαινόμενο αυτό ήταν ιδιαίτερα εμφανές σε εκείνον τον τύπο διδασκαλίας που στηριζόταν σε ένα «συνεχές παιχνίδι αλλαγών πεδίων αναπαράστασης». Η άλλη μορφή διδασκαλίας που στηριζόταν στην πορεία από τις επιμέρους εμφανίσεις της συνάρτησης προς τον τελικό ενοποιητικό ορισμό, οδήγησε σε εννοιολογική κατανόηση, υστέρησε όμως στη διαδικαστική αντίληψη της συνάρτησης.
- Από το γενικό συνεπαγωγικό διάγραμμα του ερωτηματολογίου, που συλλέχτηκε μετά τη διδακτική παρέμβαση, προκύπτει ταξινόμηση των έργων σε σχέση με την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης σε τρία επίπεδα.

  <u>Επίπεδο 1</u>: ακριβής ορισμός ή επίλυση προβλήματος που εμπλέκει διάφορα συστήματα αναπαράστασης συναρτήσεων.

  <u>Επίπεδο 2</u>: αναγνώριση συναρτήσεων σε διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης και ανακριβής ορισμός, που όμως δείχνει την αντίληψη του μονοσήμαντου.

  <u>Επίπεδο 3</u>: μερικές μορφές συναρτήσεων σε συμβολική έκφραση ή γραφική παράσταση.

  Η επιτυχία ενός έργου σε ένα επίπεδο συνεπάγεται την επιτυχία των έργων στα επόμενα επίπεδα.
- Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων προκύπτει ότι μετά από μια συστηματική διδασκαλία, η διατύπωση παραδείγματος σχετικού με την έννοια της συνάρτησης δεν παίζει σημαντικό ρόλο στη

συμπεριφορά των μαθητών σε άλλα έργα που αφορούν τις συναρτήσεις.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Ο όρος στεγανοποίηση δεν αναφέρεται με τη σημασία που αποδίδουν ορισμένοι ψυχολόγοι (π.χ. Karmiloff – Smith, 1992), με την οποία υπονοείται ότι δεν υπάρχει κανενός είδους σχέση ή επικοινωνία μεταξύ δύο συνόλων δεξιοτήτων, ικανοτήτων ή γνώσεων – ή «σπονδύλων» (Karmiloff – Smith, 1992), αλλά με τη στατιστική έννοια. Θα λέμε δηλαδή ότι ένα σύνολο έργων, ασκήσεων ή προβλημάτων είναι στεγανοποιημένο προς ένα άλλο αντίστοιχο σύνολο όταν τα δυο σύνολα σχηματίζουν διαφορετικές ομαδοποιήσεις ή κλάσεις ομαδοποιήσεων στο δενδροδιάγραμμα ομοιότητας που προκύπτει από τη συνεπαγωγική μέθοδο του R. Gras.

Στην προηγούμενη έρευνα, όμως, μελετήθηκε ξεχωριστά και το ερωτηματολόγιο Α, και από τη μελέτη αυτή προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Η πλειονότητα των φοιτητών ταυτίζει τη συνάρτηση με την ειδικότερη «ένα προς ένα συνάρτηση». Οι ερευνητές θεωρούν ότι αυτή η αντίληψη καλλιεργείται από το Δημοτικό σχολείο και παρότι λειτουργεί σε ένα μεγάλο εύρος καταστάσεων – προβλημάτων, γίνεται ένα ισχυρό εμπόδιο για την κατανόηση του γενικού ορισμού της συνάρτησης.
- Φαίνεται η αντίληψη ότι η συνάρτηση είναι μια αναλυτική σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών, όπως λειτούργησε ιστορικά, με την αντίληψη του Bernoulli αρχικά και με τον ξεκάθαρο τρόπο του Euler αργότερα.
- Εμφανίζεται μια ισχυρή αντίληψη ότι η συνάρτηση συνδέεται με ένα είδος διαγράμματος είτε αυτό είναι διάγραμμα του Venn ή γραφική παράσταση σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ενώ η αντίληψη αυτή δε φαίνεται να ισχύει για τις αλγεβρικές εκφράσεις συναρτήσεων.

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα της έρευνάς τους, θεωρούν οι ερευνητές ότι οι μαθητές που δεν κατευθύνονται σε τμήματα θετικών επιστημών έχουν μια αποσπασματική γνώση της έννοιας της συνάρτησης. Για αυτή διατηρούν μόνο συνειρμικά τη σύνδεσή της με την ιδέα της γραμμικής συνάρτησης κι ενδεχομένως την αναγνωρίζουν μέσα από τη γραφική της παράσταση, όπως επίσης κατά τον ίδιο στερεότυπο τρόπο και την παραβολή που προκύπτει από μια δευτεροβάθμια εξίσωση.

Έρευνα των Α. Γαγάτση, Ε. Αγγελίδη, Κ. Γραββάνη, Γ. Καραγιαννάκη & Π. Σπύρου εξετάζει σε μαθητές της Α΄ Λυκείου την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, την ικανότητα αναπαράστασής της με τους διάφορους τρόπους που μπορεί να αναπαρασταθεί η έννοια αυτή

(λεκτική έκφραση, αλγεβρική παράσταση, γραφική παράσταση, πίνακα τιμών και βελοδιάγραμμα) καθώς και τη μετάβαση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο. Τέλος στην έρευνα εμπλέκεται και η επίλυση προβλήματος που σχετίζεται με την έννοια της συνάρτησης.
Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή είναι τα εξής:

- Οι μαθητές δεν φαίνεται να συνδυάζουν τις δύο διαστάσεις οι οποίες παρεμβαίνουν στην επεξεργασία των συναρτήσεων, δηλαδή την εννοιολογική- επιστημολογική φύση και τις διάφορες μορφές αναπαράστασης της έννοιας αυτής.

- Η επίλυση προβλήματος συνδέεται με τη διατύπωση ορθού ορισμού από τους μαθητές και ορθού παραδείγματος συνάρτησης καθώς και σωστών απαντήσεων σε έργα αναγνώρισης και μετάφρασης. Πιο συγκεκριμένα όλοι οι μαθητές που έλυσαν σωστά το πρόβλημα έδωσαν ορθή διατύπωση ορισμού και παραδείγματος συνάρτησης καθώς και σωστές απαντήσεις σε έργα αναγνώρισης και μετάφρασης.

Όμως στην εργασία τους οι ερευνητές αναφέρουν και διδακτικές συνέπειες των διαπιστώσεών τους. Ισχυρίζονται λοιπόν ότι πρέπει:

- Να δίνεται έμφαση στην κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης αφού αυτό θα σημαίνει και την αύξηση της ικανότητάς τους στην επίλυση προβλήματος που σχετίζεται με την έννοια αυτή.
- Να ενθαρρύνονται οι μαθητές να διατυπώνουν παραδείγματα από την καθημερινή τους ζωή, ώστε να βελτιώνεται η κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης.
- Η διδασκαλία των συναρτήσεων πρέπει να δίνει έμφαση στη σύνδεση των διαφόρων μορφών αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης και στις εναλλαγές μεταξύ αυτών των διαφορετικών μορφών, αφού η κατανόηση της έννοιας αυτής περνάει μέσα από την αποστεγανοποίηση των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης.

Σε εργασία των Α. Γαγάτση, Π. Σπύρου, Θ. Καπετανίδου, Σ. Πατσιομίτου & Α. Ευαγγελίδου εξετάζεται η κατανόηση της έννοιας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε μαθητές Β΄ Λυκείου.
Πιο συγκεκριμένα μελετάται η λειτουργία των εικόνων και των γραφικών αναπαραστάσεων καθώς και η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαραστάσεων στο άλλο, στα πλαίσια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.
Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την έρευνα αυτή είναι τα ακόλουθα:

- Στην επεξεργασία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων παρεμβαίνει η εννοιολογική και η επιστημονική φύση της συνάρτησης, αλλά και η επεξεργασία των διάφορων μορφών αναπαραστάσεων.

- Οι βοηθητικές και πληροφοριακές εικόνες βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν τη δομή των προβλημάτων και να οδηγηθούν στη λύση τους.
- Η επίδραση των οργανωτικών εικόνων φαίνεται να είναι θετική, αυξάνοντας τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών.
- Ένα γεωμετρικό σχήμα φαίνεται να λειτουργεί όμοια με τις γραφικές παραστάσεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Σε εργασία των Elia I., Panaoura A., Gagatsis A. & Eracleous A. (MASSEE International Congress on Mathematics, 2006) διερευνώνται οι ορισμοί της έννοιας της συνάρτησης, που έχουν οικοδομήσει οι μαθητές Γυμνασίου, σε σχέση με τις ικανότητές τους σε έργα συναρτήσεων που αφορούν σε διαφορετικούς τύπους αναπαραστάσεων και επίλυσης προβλήματος.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης μπορεί να αναλυθεί μέσα από τρία διαφορετικά χαρακτηριστικά: τους ορισμούς που έχουν οικοδομήσει οι μαθητές, την ικανότητα να χρησιμοποιούν διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και την ικανότητα να επιλύουν προβλήματα συναρτήσεων που περιλαμβάνουν μετατροπές από ένα τύπο αναπαραστάσεων σε άλλον.

- Τα ευρήματα αποκάλυψαν τις δυσκολίες των μαθητών να δίνουν σωστό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης και να επιλύουν προβλήματα συναρτήσεων που συμπεριλαμβάνουν μετατροπές μεταξύ διαφόρων αναπαραστασιακών συστημάτων.
- Όμως φάνηκαν επίσης ισχυρές σχέσεις μεταξύ της εικόνας της έννοιας της συνάρτησης των μαθητών και της ικανότητάς τους να χρησιμοποιούν συγκεκριμένες αναπαραστάσεις της συνάρτησης.

Οι αναπαραστάσεις σε διαφορετικά συστήματα αποτελούν το βασικό κλειδί για την εννοιολογική κατανόηση και καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό το επίπεδο μάθησης (Hitt, 1996), ενώ σύμφωνα με τους Greeno & Hall (1997) μπορούν να θεωρηθούν ως σημαντικά εργαλεία για την οικοδόμηση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και για τις δεξιότητες επικοινωνίας. Επιπρόσθετα το είδος της αναπαράστασης που χρησιμοποιείται δημιουργεί σημαντικές διαφορές στην επίλυση ενός προβλήματος αφού αλλάζει δραματικά το επίπεδο δυσκολίας του (Hitt, 1996: Norman, 1993: Gagatsis & Christou, 2002).

Οι Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi (1993) ανέπτυξαν ένα θεωρητικό πλαίσιο αναφορικά με την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης, το οποίο χαρακτηρίζεται από δύο αρχές: (α) τα διαθέσιμα μέσα για την αναπαράσταση της συνάρτησης (αλγεβρική, γεωμετρική και σε πίνακα) και (β) τη διάσταση στην οποία αντιμετωπίζεται μια συνάρτηση.

Σύμφωνα με τους τελευταίους υπάρχουν δύο διαφορετικές διαστάσεις, η **διάσταση διαδικασίας ή αλγεβρική διάσταση** και η **διάσταση αντικειμένου ή γεωμετρική διάσταση.**
Σύμφωνα με την πρώτη, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων x και τεταγμένων y, αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x με μια τιμή και υπολογίζουν την τιμή του y και μπορούν να λύσουν μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης.
Σύμφωνα με τη δεύτερη διάσταση, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση ως μια οντότητα. Έτσι αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης από την αλγεβρική της έκφραση και κάνουν παρατηρήσεις για τις τιμές και το πρόσημό της, για παράδειγμα, για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x$ και $g(x) = 2x+2$ και χρησιμοποιούν τη σχέση που τις συνδέει, δηλαδή $g(x) = f(x)+ 2$ (Knuth, 2000).
Στη διάσταση αντικειμένου η συνάρτηση αντιμετωπίζεται ως μια οντότητα που είναι ανεξάρτητη και έχει τις δικές της διαδικασίες και τη δική της συμπεριφορά. Οι συναρτήσεις μπορούν να θεωρηθούν ως αντικείμενα, στα οποία οι πράξεις (των συναρτήσεων) μπορούν να εκτελεστούν.
Έτσι, ένα έργο στο οποίο παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων και οι μαθητές πρέπει να εξηγήσουν πώς η μια μετασχηματίζεται και παράγει την άλλη, απαιτεί την υιοθέτηση της δεύτερης διάστασης, αυτήν του αντικειμένου.
Ποικίλες έρευνες έχουν δείξει ότι η διάσταση διαδικασίας αναπτύσσεται πριν τη διάσταση αντικειμένου, ενώ η τελευταία είναι αρκετά δύσκολο να αποκτηθεί (Moschkovich et al, 1993 : Yeroushalmy & Scharz, 1993). Ακόμη, ότι μαθητές που μπορούν και αντιμετωπίζουν τις συναρτήσεις και στις δύο διαστάσεις, συναντούν δυσκολίες όταν απαιτείται η μεταφορά από τη μια διάσταση στην άλλη (Moschkovich et al, 1993).
Πολλοί ερευνητές θεωρούν ότι για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι απαραίτητο οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση και στις δύο διαστάσεις της, δηλαδή τόσο ως διαδικασία όσο και ως οντότητα (Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992: Moschkovich et al, 1993: Sfard, 1992: Yeroushalmy & Scharz, 1993).
Από την άλλη υπάρχει διεθνώς μια αυξανόμενη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών στη διδασκαλία των συναρτήσεων, η οποία οδηγεί σε αυξανόμενη ανάγκη καθορισμού των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μορφών αναπαράστασης της έννοιας αυτής.
Η χρησιμοποίηση λογισμικού, το οποίο παρέχει τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων για τις συναρτήσεις, μπορεί να ενισχύσει τις ικανότητες μετάφρασης από τη μια μορφή αναπαράστασης σε άλλη και να τους βοηθήσει να μελετούν ποιοτικά μια γραφική παράσταση (Yeroushalmy, 2000).

Έρευνα των Ν. Μουσουλίδη, Μ. Πιττάλη και Α. Γαγάτση μελετά την ικανότητα των φοιτητών στην κατασκευή γραφικών παραστάσεων, μέσα από τη διερεύνηση της διάστασης (αλγεβρική και γεωμετρική διάσταση), αλλά και στη μετάφραση μεταξύ συμβολικής και γραφικής αναπαράστασης. Διερευνά επίσης και την επίδραση της χρήσης εκπαιδευτικού λογισμικού στην ικανότητα των φοιτητών να επιλύουν με γεωμετρικό τρόπο προβλήματα συναρτήσεων.

Από την έρευνα προέκυψαν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- Η κατάλληλη χρήση εκπαιδευτικού υλικού μπορεί να βοηθήσει τους φοιτητές να συνδέουν μεταξύ τους τις διάφορες μορφές αναπαράστασης και να επιλύουν προβλήματα συναρτήσεων.
- Η ικανότητα γεωμετρικής προσέγγισης στην κατασκευή γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και στην επίλυση προβλημάτων συναρτήσεων δεν είναι ανεπτυγμένη όσο θα αναμενόταν.
- Φάνηκε μια προτίμηση των περισσότερων φοιτητών προς μια αλγεβρική προσέγγιση, ως αρχικής μεθόδου λύσης, ακόμη και στα έργα στα οποία η γεωμετρική φαινόταν πιο εύκολη και πιο αποδοτική από την αλγεβρική. Αυτές οι δυσκολίες μπορεί να οφείλονται στο γεγονός ότι η γραφική παράσταση κρύβει τις αναγκαίες και απαραίτητες πληροφορίες για την επίλυση προβλημάτων συνάρτησης (Larkin & Simon, 1987) ή και στη φύση των ίδιων των προβλημάτων (Dugdale, 1993: Harel, et al., 1992).
- Τα αποτελέσματα της έρευνας στηρίζουν την υπόθεση ότι η διδασκαλία μετάφρασης αναπαραστάσεων με τη χρήση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού μπορεί να βοηθήσει τους φοιτητές να οικοδομήσουν μια γεωμετρική προσέγγιση, η οποία θα τους δώσει τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων συναρτήσεων με πιο αποτελεσματικό τρόπο.

Καταλήγοντας στο άρθρο τους οι συγγραφείς συμφωνούν με τις απόψεις άλλων ερευνητών (Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992: Moschkovich et al, 1993) ότι η χρήση τεχνολογικά εμπλουτισμένων περιβαλλόντων για τη μελέτη των αναπαραστάσεων συναρτήσεων μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν και να κατανοήσουν την έννοια της συνάρτησης ως εννοιολογικής ενότητας. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Yeroushalmy & Scharz (1993), το κατάλληλο λογισμικό κατασκευής γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να εστιάζουν την προσοχή τους όχι στις λεπτομέρειες της κατασκευής αυτής και να τους επιτρέψει να ωφεληθούν από τη μελέτη και χειρισμό της γραφικής παράστασης ως οντότητας. Τέλος μπορούν να κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων μορφών αναπαράστασης και να αποκτήσουν καλλίτερη και βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης (Yeroushalmy, 2000).

Ο Janvier (1987) ισχυρίζεται ότι η ικανότητα επίλυσης προβλήματος απαιτεί δεξιότητες μετάφρασης, οι οποίες αποτελούν το τελευταίο στάδιο κατανόησης μιας έννοιας (τα άλλα είναι η ικανότητα *αναγνώρισης* της έννοιας μέσα από μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης που μπορεί να εμφανίζεται αυτή και η ικανότητα *ευέλικτου χειρισμού* της μέσα στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου συστήματος αναπαραστάσεων).

Σε έρευνα των Α. Γαγάτση, Α. Μάρκου, Κ. Ματθαίου, Μ. Αντωνιάδη Γ. Μακρίδη και Α. Φιλίππου διερευνάται η ικανότητα των φοιτητών στην επίλυση προβλημάτων συναρτήσεων και εξετάζεται η ικανότητα μετάφρασης στα συγκεκριμένα προβλήματα. Διερευνάται επίσης η επίδραση της διδασκαλίας, στη βελτίωση της ικανότητας των υποκειμένων για επίλυση μαθηματικού προβλήματος. Στόχος της διδασκαλίας αυτής ήταν η ενίσχυση της ικανότητας ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα σε ένα σύστημα αναπαράστασης, αλλά και των μεταφράσεων μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναπαραστάσεων.

Πιο συγκεκριμένα η έρευνα διεξήχθη σε τρία στάδια. Το πρώτο έγινε με ένα προ-τεστ, που περιείχε πέντε προβλήματα με ερωτήματα που αφορούσαν στην έννοια της συνάρτησης, μεταφράσεις από το ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας αυτής στο άλλο και εφαρμογές της στην επίλυση προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Μετά οργανώθηκε διδασκαλία που περιελάμβανε εννοιολογικά στοιχεία στο χώρο των συναρτήσεων και εξάσκηση σε έργα μεταφράσεων ενώ στο τελευταίο στάδιο δόθηκε τεστ ανάλογο με το αρχικό στο οποίο υπήρχαν δύο προβλήματα ίδια με του αρχικού τεστ, δύο ισομορφικά και ένα διαφορετικό.

Τα συμπεράσματα της παραπάνω έρευνας είναι τα ακόλουθα:

- Φάνηκε ότι η διδασκαλία εννοιολογικών στοιχείων στο χώρο των συναρτήσεων βελτίωσε την επίδοση των φοιτητών στην επίλυση όχι μόνο των ίδιων των προβλημάτων, αλλά και ισομορφικών.
- Παρά το γεγονός ότι υπήρξε η παραπάνω βελτίωση, φαίνεται(από τα συνεπαγωγικά διαγράμματα) αυτή να είναι τοπικού και όχι ολικού χαρακτήρα. Δεν επιτυγχάνεται δηλαδή βαθιά κατανόηση των προβλημάτων αυτού του τύπου, παρά την ποσοτική βελτίωση της επίδοσης των φοιτητών.

Οι μαθητές συναντούν την έννοια της συνάρτησης με τις διάφορες αναπαραστάσεις της κατά τη διάρκεια φοίτησής τους αρχικά στο Γυμνάσιο και μετά στο Λύκειο. Παρά το γεγονός ότι η επαφή τους στα Μαθηματικά με την έννοια αυτή είναι μακροχρόνια και στενή φαίνεται ότι αντιμετωπίζουν αρκετές δυσκολίες. Μάλιστα τα αποτελέσματα ερευνών δείχνουν ότι τη σύγχυση και τις δυσκολίες εξακολουθούν να τις διατηρούν και στην μετέπειτα πορεία τους στο Πανεπιστήμιο.

Σε εργασία των Α. Γαγάτση και Α. Ττίκη γίνεται προσπάθεια εντοπισμού των δυσκολιών και συγχύσεων που έχουν οι μαθητές και οι φοιτητές σχετικά με την έννοια της συνάρτησης και τις διάφορες μορφές αναπαράστασής της.
Για την εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκαν τα αποτελέσματα από τέσσερις πρόσφατες έρευνες που διεξήχθησαν στην Ελλάδα και στην Κύπρο. Αυτές ήταν οι ακόλουθες:

1. Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων και ο Μετασχηματισμός τους από Μαθητές Λυκείου (πρώτη έρευνα). Η έρευνα αυτή διεξήχθη από τους Α. Γαγάτση, Ε. Μιχαηλίδου και Μ. Σιακαλλή σε μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου το 2001 και εξετάστηκε η ικανότητα μετάφρασης μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας και ανάμεσα στην ικανότητα άμεσης μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος.
2. Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων και ο Μετασχηματισμός τους από Μαθητές Α΄ Λυκείου. Η έρευνα αυτή διεξήχθη από τους Α. Γαγάτση, Ε. Αγγελίδη, Κ. Γραββάνη, Γ. Καραγιαννάκη & Π. Σπύρου το 2004 και εξετάστηκε η σύνδεση του σωστού ορισμού με την ικανότητα μετάφρασης στις διάφορες μορφές που μπορεί να αναπαρασταθεί η έννοια αυτή (λεκτική έκφραση, αλγεβρική παράσταση, γραφική παράσταση, πίνακα τιμών και βελοδιάγραμμα) καθώς και τη μετάβαση από το ένα πεδίο αναπαράστασης στο άλλο.
3. Αναπαραστάσεις Συναρτήσεων και ο Μετασχηματισμός τους από φοιτητές Πανεπιστημίου. Η έρευνα αυτή διεξήχθη από τους Α. Γαγάτση, Ε. Μιχαηλίδου και Μ. Σιακαλλή σε φοιτητές του Πανεπιστημίου Κύπρου το 2001. Σε αυτήν την έρευνα εξετάστηκε η ικανότητα μετάφρασης μεταξύ των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας και ανάμεσα στην ικανότητα άμεσης μετάφρασης και επίλυσης προβλήματος.
4. Αντιλήψεις δευτεροετών φοιτητών του τμήματος Επιστημών της Αγωγής για την έννοια της συνάρτησης. Η έρευνα αυτή διεξήχθη το 2003 από τους Α. Γαγάτση, Π. Σπύρου, Α. Ευαγγελίδου και Ι. Ηλία. Σε αυτήν την έρευνα εξετάστηκε η εννοιολογική αντίληψη της έννοιας της συνάρτησης και μελετήθηκε κατά πόσο και σε ποιο βαθμό μπορεί να έχει θετικά αποτελέσματα σχετική διδασκαλία βασισμένη στα εμπόδια κατανόησης.

Από τα συγκριτικά αποτελέσματα των παραπάνω εργασιών προκύπτουν τα επόμενα:

- **Ως προς τις αντιλήψεις –παρανοήσεις-δυσκολίες που υπάρχουν αναφορικά με την έννοια της συνάρτησης**:
    - Όταν δόθηκε στα υποκείμενα (φοιτητές) κάποιο <u>λεκτικό παράδειγμα</u> και ζητήθηκε να αποφασίσουν

αν αποτελεί συνάρτηση παρουσιάστηκαν στις απαντήσεις τους οι εξής παρανοήσεις:

1. Η συνάρτηση πρέπει οπωσδήποτε να εκφράζεται ως μια αλγεβρική σχέση.
2. Η συνάρτηση πρέπει να περιέχει δύο μεταβλητές.
3. Η συνάρτηση είναι οπωσδήποτε ‘1-1’ αντιστοιχία.
4. Ταύτιση της έννοιας της συνάρτησης με μια εξίσωση.

- Όταν δόθηκε στους φοιτητές μια <u>αλγεβρική έκφραση</u> και ζητήθηκε να αποφασίσουν αν αποτελεί

συνάρτηση παρουσιάστηκαν στις απαντήσεις τους οι εξής παρανοήσεις:

1. Στην αλγεβρική έκφραση πρέπει να υπάρχουν δύο άγνωστοι.
2. Προσήλωση στη μορφή του συμβόλου που χρησιμοποιείται στην αλγεβρική έκφραση.
3. Η συνάρτηση πρέπει να είναι μια γραμμική σχέση.
4. Η συνάρτηση πρέπει να είναι ‘1-1’.
5. Κάποιες αλγεβρικές εκφράσεις αποτελούν στερεοτυπικές μορφές που σε αρκετές περιπτώσεις αποτελούν γνωστικά εμπόδια.

- Όταν δόθηκαν στους φοιτητές <u>γραφικές παραστάσεις</u> σε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων παρουσιάστηκαν παρανοήσεις όπως οι παρακάτω:

1. Η γραφική παράσταση συνάρτησης πρέπει να είναι συνεχής.
2. Η γραφική παράσταση συνάρτησης πρέπει να τέμνει κάποιον από τους άξονες.
3. Και σε αυτή την περίπτωση κάποιες γραφικές παραστάσεις φάνηκε να αποτελούν στερεοτυπικές μορφές.

- Σχετικά με τα <u>βελοδιαγράμματα</u> παρουσιάστηκαν παρανοήσεις όπως οι παρακάτω:

1. Όλα τα στοιχεία θα πρέπει να παίρνουν μέρος στην αντιστοίχιση.
2. Προσκόλληση στην στερεότυπη εικόνα των συνεκτικών περιγραμμάτων.

- **Ως προς τη σύνδεση της κατανόησης του ορισμού της συνάρτησης με παράδειγμα, με την αναγνώρισή της στις διάφορες μορφές αναπαράστασής της και με την επίλυση προβλήματος:**
    1. Φαίνεται από τη δεύτερη έρευνα να υπάρχει στενή σχέση μεταξύ λάθους ορισμού και λάθους –ασαφούς παραδείγματος όπως και μεταξύ σωστού ορισμού και σωστού παραδείγματος, ενώ στην τέταρτη έρευνα όσοι έδιναν προσεγγιστικά σωστό ορισμό έδωσαν σωστό παράδειγμα συνάρτησης ‘1-1’.
    2. Από τη δεύτερη έρευνα φάνηκε ότι η απόδοση του σωστού ορισμού σχετίζεται με την επιτυχία στα προβλήματα και στα βελοδιαγράμματα.
    3. Όμως από την ίδια έρευνα φάνηκε ότι η επιτυχία σε έργα γραφικών παραστάσεων δεν προϋποθέτει κατανόηση του ορισμού της συνάρτησης, ενώ από την τέταρτη έρευνα φάνηκε η διατύπωση ορθού ορισμού όπως και παραδείγματος είχε προβλεπτικό χαρακτήρα ως προς τη συμπεριφορά των υποκειμένων στα βελοδιαγράμματα και τις γραφικές παραστάσεις.

- **Ως προς την ύπαρξη ικανότητας αναγνώρισης της έννοιας όταν αυτή παρουσιάζεται με τουλάχιστον δύο εξωτερικές αναπαραστάσεις και την ικανότητας μετάφρασης της έννοιας από τη μια μορφή στην άλλη:**
    1. Τόσο οι μαθητές Α΄ και Β΄ Λυκείου όσο και οι φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο χειρισμό των διαφόρων αναπαραστάσεων της συνάρτησης γεγονός που δείχνει ότι δεν έχουν οικοδομήσει πλήρη και συμπαγή εικόνα για την έννοια αυτή.
    2. Αναφορικά με την ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης της έννοιας σε άλλο, οι μαθητές αλλά και οι φοιτητές αντιμετώπισαν τις διαφορετικές μεταφράσεις που αντιστοιχούσαν στο ίδιο έργο ως διαφορετικά έργα, γεγονός που δείχνει ότι τα υποκείμενα δεν κατανοούν πως πρόκειται για διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας.

- **Ως προς τη σχέση ανάμεσα στην επιτυχία σε έργα άμεσης μετάφρασης και στην επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, τα οποία απαιτούν τη μετάφραση από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο, αλλά και το αν το είδος της αρχικής αναπαράστασης επηρεάζει την επιτυχία στα έργα μετάφρασης :**

1. Φαίνεται ότι η επιτυχία στην επίλυση έργων άμεσης μετάφρασης είναι ένας από τους σημαντικούς παράγοντες που επηρεάζουν την επίλυση προβλημάτων.
2. Φαίνεται ότι στα έργα άμεσης μετάφρασης αλλά και στα έργα έμμεσης μετάφρασης η μορφή της αρχικής αναπαράστασης που δίνεται καθώς και το είδος της μετάφρασης παίζουν ρόλο στην επιτυχία στα έργα. Οι γραφικές παραστάσεις φαίνεται να δυσκολεύουν περισσότερο και αντιμετωπίζονται κάπως αρνητικά.

- **Ως προς το ρόλο της διδασκαλίας:**

Φαίνεται ότι η διδασκαλία παίζει ένα σημαντικό ρόλο. Τα αποτελέσματα της τέταρτης έρευνας έδειξαν ότι ενώ πριν τη διδασκαλία υπήρχε στεγανοποίηση σε έργα στο ίδιο πεδίο αναπαράστασης, δηλαδή οι απαντήσεις των φοιτητών έμοιαζαν ως προς το είδος της αναπαράστασης και όχι ως προς τη μαθηματική σχέση που αναπαρίσταται, η διδασκαλία εκείνη που βασιζόταν σε ένα συνεχές παιχνίδι εναλλαγών πεδίων αναπαράστασης επέφερε την αποστεγανοποίηση.

5. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΞΟΝΙΚΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Η συμμετρία στα Μαθηματικά είναι μια εσωτερική ιδιότητα ενός μαθηματικού αντικειμένου, η οποία το κάνει να παραμένει αναλλοίωτο από την επίδραση κάποιων μετασχηματισμών, όπως της περιστροφής, της ανάκλασης, της αντιστροφής ή πιο αφηρημένων πράξεων. Η σπουδή της συμμετρίας στα μαθηματικά συστηματοποιείται και τυποποιείται σε μια περιοχή των μαθηματικών, τη θεωρία ομάδων.
Η συμμετρία μπορεί να είναι παρούσα στη μορφή των συντελεστών μιας εξίσωσης όπως και στη φυσική διευθέτηση αντικειμένων. Με την ταξινόμηση της συμμετρίας των πολυωνυμικών εξισώσεων, χρησιμοποιώντας τη θεωρία ομάδων μπορούμε για παράδειγμα να αποδείξουμε ότι η γενική εξίσωση πέμπτου βαθμού δεν επιλύεται.
Στη φυσική, το πολύ ισχυρό θεώρημα συμμετρίας της E. Noether δηλώνει ότι κάθε συμμετρία ενός συστήματος οδηγεί σε μια φυσικώς διατηρητέα ποσότητα, όπως για παράδειγμα η συμμετρία στο χρόνο οδηγεί σε διατήρηση της ενέργειας.

Η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα (ανάκλαση) αποτελεί μέρος των συμμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίοι εντάσσονται μέσα στα πλαίσια της γεωμετρίας . Ο Joe Rosen (1995), αναφερόμενος στη συμμετρία στη γεωμετρία, ισχυρίζεται ότι η συμμετρία είναι ‘ανοσία’ σε μια πιθανή αλλαγή (“symmetry is immunity to a possible change” (p.2).). Η αλλαγή αυτή εννοείται ως ένας μετασχηματισμός ενός γεωμετρικού αντικειμένου που διατηρεί τις γεωμετρικές ιδιότητες του αντικειμένου αυτού.
Οι Leikin, Berman και Zaslavsky (1997) επεκτείνοντας τον προηγούμενο ορισμό ισχυρίζονται ότι η συμμετρία περιέχει τρία στοιχεία: ένα γεωμετρικό αντικείμενο, τις ιδιότητές του και ένα μετασχηματισμό. Θα μπορούσαμε να πούμε, γενόμενοι πιο συγκεκριμένοι, ότι η συμμετρία ως προς άξονα (reflection) περιλαμβάνει ένα αρχικό γεωμετρικό αντικείμενο, μια διαδικασία μετασχηματισμού και ένα παραγόμενο αντικείμενο, το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με το αρχικό. Φυσικά η ισότητα του αρχικού με το παραγόμενο αντικείμενο δεν αποτελεί το μοναδικό κριτήριο αφού η διαδικασία του μετασχηματισμού απαιτεί την ένα προς ένα αντιστοίχιση των στοιχείων των δύο αντικειμένων σύμφωνα με τη διαδικασία του συγκεκριμένου μετασχηματισμού.
Οι Lean και Clements (1981) κάνουν αναφορά για **χωρική ικανότητα** (spatial ability) ορίζοντας την ως «την ικανότητα να σχηματίζει κάποιος νοητικές εικόνες και να τις χειρίζεται στο μυαλό». Την ικανότητα αυτή τη συσχετίζουν με την επιτυχία στα Μαθηματικά και κυρίως με τη Γεωμετρία. Θεωρούν ότι ο ρόλος της στην οικοδόμηση των εννοιών είναι πολύπλευρος αλλά και ασαφής. Ισχυρίζονται ότι υπάρχουν δύο κύριες συνιστώσες της χωρικής ικανότητας, η **χωρική οπτικοποίηση** (spatial visualization) και ο **χωρικός προσανατολισμός** (spatial orientation).

Οι Clements και Battista (1992) θεωρούν ότι η χωρική ικανότητα συνδέεται στενά με τη Γεωμετρία των μετασχηματισμών, ορίζουν τη χωρική οπτικοποίηση ως την «κατανόηση και εκτέλεση νοερών κινήσεων αντικειμένων στον χώρο δύο ή τριών διαστάσεων», και το χωρικό προσανατολισμό ως την «κατανόηση και τον χειρισμό των σχέσεων ανάμεσα στις θέσεις των αντικειμένων στο χώρο σε σχέση με τη θέση κάποιου».
Η ομοιότητα μεταξύ αυτών των δύο συνιστωσών είναι η ενημέρωση των σχέσεων ανάμεσα στη θέση του αντικειμένου και του παρατηρητή (Zacks, Mires, Tversky & Hazeltine, 2002). Η διαφορά συνίσταται στο αν είναι η θέση του αντικειμένου ή του παρατηρητή αυτή που μετασχηματίζεται.
Οι Kozhevnikov και Hegarty (2001) έδωσαν προσοχή στο γεγονός ότι αν και τα αποτελέσματα των περιστροφών αντικειμένων και των αυτό-περιστροφών στο ίδιο έργο μπορεί να είναι ισοδύναμα, στην πραγματικότητα είναι έργα με διαφορετικό βαθμό δυσκολίας. Η πρώτη κατηγορία έχει να κάνει με το πώς φανταζόμαστε μια σκηνή από διαφορετικά σημεία προοπτικής απεικόνισης (perspective taking), ενώ η άλλη απαιτεί νοητικές ικανότητες που χρειάζονται ένα χωρικό μετασχηματισμό ενός αντιληπτού αντικειμένου, δηλαδή νοητική περιστροφή (mental rotation).
Οι Clements και Battista αναφέρουν ότι η επίδοση σε χωρικά έργα αυξάνεται με το επίπεδο της τάξης. Έρευνα των Epley, Morewedge and Keysar (2004) σχετικά με τις ικανότητες προοπτικής απεικόνισης έδειξε ότι μεγαλύτερα παιδιά διαπράττουν λιγότερα εγωκεντρικά σφάλματα από μικρότερα και ότι η προοπτική απεικόνιση γίνεται πιο αποτελεσματική με την εξάσκηση και την εμπειρία.

Οι έρευνες που αφορούν την ανάπτυξη και τη διδασκαλία της συμμετρίας σε στοιχειώδες επίπεδο φαίνονται να είναι αρκετά φτωχές και εστιάζουν κυρίως σε πειράματα διδασκαλίας που περιέχουν συνήθως τεχνολογικά μέσα. Οι Hoyles and Healy (1997), για παράδειγμα χρησιμοποίησαν μικρόκοσμο για να βοηθήσουν μαθητές να εστιάσουν ταυτόχρονα σε δράσεις, οπτικές σχέσεις και συμβολικές αναπαραστάσεις σχετικές με συμμετρία ως προς άξονα. Περιγράφουν την πρωτόγονη και διαισθητική ποικιλία στρατηγικών των μαθητών για να αντιμετωπίσουν έργα συμμετρίας ως προς άξονα με μολύβι και χαρτί. Διαπίστωσαν ότι η εύρεση συμμετρικού ενός αντικειμένου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα ήταν πιο εύκολη για τους μαθητές από αυτήν σε πλάγιο άξονα συμμετρίας.
Εστίασαν την προσοχή τους στην περίπτωση της δωδεκάχρονης Emily, η οποία χρησιμοποιούσε μια προσεγγιστική στρατηγική που προκύπτει από τη δίπλωση χαρτιού. Όταν το σχήμα εφαπτόταν με τον άξονα συμμετρίας

ή τον έτεμνε, κατασκεύαζε τότε την εικόνα επιμηκύνοντας το αντικείμενο πέρα από τον άξονα συμμετρίας και με ελαφρύ τιναγματάκι- αποκτώντας μια περιστροφή μάλλον παρά μια ανάκλαση (το συμμετρικό ως προς άξονα). Αυτό που είναι σημαντικό στην έρευνα αυτή είναι ο ισχυρισμός των ερευνητών ότι η Emily κατάφερε να κατασκευάσει τις ιδιότητες της συμμετρίας με τοποθέτηση του εαυτού της στον κόσμο των χελωνών. Στηριζόμενος στην παρατήρηση αυτή μπορεί να υποθέσει κάποιος ότι η ανάπτυξη της ικανότητας προοπτικής απεικόνισης των μαθητών έχει επίπτωση στην ικανότητά τους να επιλύουν έργα συμμετρίας ως προς άξονα. Αυτό όμως χρειάζεται να διερευνηθεί.

Σε έρευνα των Xenia Xistouri & Demetra Pitta-Pantazi (**SPATIAL ROTATION AND PERSPECTIVE TAKING ABILITIES IN RELATION TO PERFORMANCE IN REFLECTIVE SYMMETRY TASKS)** σε παιδιά 10-12 ετών αναφορικά με την επίδοσή τους σε έργα συμμετρίας ως προς άξονα, διαπιστώθηκε ότι η επιτυχία σε αυτά μπορεί να προβλεφθεί από τη γενική μαθηματική επιτυχία των μαθητών, τις ικανότητές τους στην προοπτική απεικόνιση και σε αυτές της χωρικής περιστροφής, κατά φθίνουσα διάταξη σημασίας. Δεν φάνηκε να συσχετίζονται το φύλλο και το επίπεδο της τάξης.

Βρέθηκε επίσης συσχέτιση ανάμεσα στους δύο τύπους της χωρικής ικανότητας, αλλά όχι τόσο δυνατή όπως σε άλλες έρευνες (Kozhevnikov & Hegarty, 2001; Zacks et al., 2002; Hegarty & Waller, 2004), γεγονός που μπορεί να οφείλεται στο νεαρό της ηλικίας του ερευνηθέντος πληθυσμού, συγκρινόμενο με τους φοιτητές Κολεγίου, που αποτέλεσαν τον πληθυσμό των προαναφερόμενων ερευνών. Ίσως τα παιδιά να μην αναγνωρίζουν τις ομοιότητες όπως οι μεγάλοι και να οπτικοποιούν νοερά διαφορετικά από τους μεγάλους.

Τέλος από την έρευνα αυτή φαίνεται ότι διαφορετικά έργα συμμετρίας ίσως απαιτούν διαφορετικές ικανότητες. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι τέτοια έργα απαιτούν περισσότερο χωρικές παρά γνωστικές ικανότητες, ιδιαίτερα δε περισσότερο ικανότητες χωρικού προσανατολισμού (προοπτική απεικόνιση) παρά ικανότητες χωρικής οπτικοποίησης (νοερή περιστροφή).

6. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ ΚΑΙ Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΗΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Η **έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα** εμφανίζεται για πρώτη φορά στο βιβλίο των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου.

Η παρουσίαση της έννοιας αυτής γίνεται οπτικά με τη βοήθεια εικόνων και σχημάτων από τη χειροτεχνία, από την αρχιτεκτονική ή τη διακοσμητική, μέσω εμπειριών δηλ. από την καθημερινότητα των παιδιών.

Στο βιβλίο παρουσιάζονται κάποια σχήματα με χαραγμένη στο καθένα μια ευθεία *ε* , η οποία, όπως αναφέρεται χαρακτηριστικά, ‘έχει μια ιδιαίτερη σημασία για τα σχήματα αυτά’ και μετά ακολουθεί ο ‘ορισμός’: **΄Η ευθεία ε χωρίζει καθένα από τα σχήματα σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν. Γι’ αυτό λέμε ότι η ευθεία ε είναι ένας άξονας συμμετρίας του σχήματος ή ακόμη ότι καθένα από τα σχήματα έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.’** (βιβλίο μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου, σελ. 222)

Το σχολικό βιβλίο αναφέρεται αρχικά σε άξονα συμμετρίας ενός σχήματος και μετά σε σχήματα με περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας.

Μετά, η έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα αναλύεται περισσότερο και εφαρμόζεται για την δικαιολόγηση κάποιων ιδιοτήτων συγκεκριμένων, ήδη γνωστών, γεωμετρικών σχημάτων, όπως του ισοσκελούς τριγώνου, του ισοσκελούς τραπεζίου, του ρόμβου, του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του τετραγώνου και του κύκλου.

Μέσω των αντίστοιχων ασκήσεων της παραγράφου αυτής ζητείται από τα παιδιά να προσδιορίσουν και να σχεδιάσουν τον έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας που μπορεί να έχουν κάποια δεδομένα σχήματα. Στο σημείο αυτό αναφέρεται υπόρρητα ότι κάποιο σχήμα μπορεί να μην έχει άξονα συμμετρίας.

Κατόπιν, μέσω της ήδη αναφερθείσας ιδιότητας της διαμέσου ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, η οποία άγεται προς τη βάση του ΒΓ, ότι αποτελεί άξονα συμμετρίας του και δεδομένου ότι αυτή είναι και μεσοκάθετος της ΒΓ δίνεται ο ορισμός των συμμετρικών σημείων. Έτσι, ‘*Δύο σημεία Μ και Μ΄ λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ε, όταν η ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΜΜ΄.’*(σελ. 236).

Ακολουθεί, αφού πρώτα δοθεί παράδειγμα, ο ορισμός των συμμετρικών σχημάτων ως προς ευθεία *ε* ‘*Δύο σχήματα (Σ1) και (Σ2) λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία ε, όταν καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς την ευθεία ε.*’ (σελ. 237)

Μετά συνάγεται το συμπέρασμα ότι *τα συμμετρικά ως προς ευθεία σχήματα είναι ίσα*, δικαιολογώντας το από το γεγονός ότι αυτά

συμπίπτουν αν διπλώσουμε την ευθεία, ως προς την οποία είναι συμμετρικά.
Συνεχίζοντας την αναφορά στη συμμετρία ως προς άξονα, διατυπώνεται η πρόταση ότι *όταν ένα σχήμα έχει άξονα συμμετρίας, το συμμετρικό του ως προς τον άξονα αυτόν είναι το ίδιο το σχήμα.*
Στο τέλος αναφέρεται η κατασκευή από τη μια του συμμετρικού ενός σημείου ως προς ευθεία, φέρνοντας την κάθετη από το σημείο προς την ευθεία και προεκτείνοντάς την κατά ίσο τμήμα, και από την άλλη των συμμετρικών ενός ευθυγράμμου τμήματος, μιας ευθείας, ενός τριγώνου και ενός κύκλου, δηλαδή ορισμένων γνωστών σχημάτων. Στις αντίστοιχες ασκήσεις ζητείται από τα παιδιά να κατασκευάσουν τα συμμετρικά κάποιων σημείων του Καρτεσιανού επιπέδου ως προς τον άξονα χ΄χ , τον y΄y και τη διχοτόμο δ της γωνίας χοy καθώς και το συμμετρικό κάποιων σχημάτων ως προς διάφορες ευθείες.

Μεταξύ των στόχων που έχουν τεθεί από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο να επιτευχθούν σε σχέση με τη διδασκαλία του παραπάνω κεφαλαίου είναι:
i) Να μπορούν να αναγνωρίζουν οι μαθητές σχήματα με άξονα ή άξονες συμμετρίας.
ii) Να γνωρίζουν πότε δύο σημεία λέγονται συμμετρικά ως προς ευθεία.
iii) Να μπορούν να κατασκευάζουν το συμμετρικό ενός σημείου ή ενός ευθυγράμμου τμήματος ή ενός πολυγώνου ή ενός κύκλου ως προς ευθεία.
(Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003 Τεύχος Β΄)

Η **έννοια της συνάρτησης** παρουσιάζεται στην ίδια τάξη, μέσω παραδειγμάτων <u>λεκτικά διατυπωμένων</u>, ως μια αλληλεξάρτηση μεταξύ δύο μεταβλητών χ και y που συνδέονται με μια <u>αλγεβρική σχέση</u> (δίνεται για παράδειγμα η σχέση y=80χ και η $Ε=α^2$), έτσι ώστε για κάθε τιμή της μιας μεταβλητής (χ ή α) να ορίζεται μια μόνο τιμή της άλλης (y ή Ε αντίστοιχα).
Κατόπιν αναφέρεται ότι η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών χ και y σε μια συνάρτηση μπορεί να φανεί καλύτερα μέσω ενός <u>πίνακα τιμών</u>.
Τέλος ορίζεται η <u>γραφική παράσταση</u> συνάρτησης ως τα σημεία του (Καρτεσιανού) επιπέδου που οι συντεταγμένες τους είναι όλα τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών της συνάρτησης(σελ. 144-151).
Στις αντίστοιχες ασκήσεις ζητείται από τους μαθητές να εκφράσουν προβλήματα συναρτήσεων λεκτικά διατυπωμένα σε αλγεβρική μορφή, και να λύσουν προβλήματα μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης σε άλλη (αλγεβρική μορφή, πίνακας τιμών, γραφική παράσταση). Αξίζει να σημειώσουμε ότι μέσω άσκησης γίνεται προσπάθεια διάκρισης μιας οποιασδήποτε γραμμής από τη γραφική παράσταση συνάρτησης.

Παρατηρούμε ότι η έννοια της συνάρτησης παρουσιάζεται μέσω διαφόρων μορφών αναπαράστασής της, κάτι που θα το χαρακτηρίζαμε ως θετικό, σύμφωνα με τις διεθνώς επικρατούσες απόψεις.

Στη <u>Γ΄ Γυμνασίου</u> επανέρχεται η έννοια της συνάρτησης, που εμπλουτίζεται με το σχήμα μιας μηχανής, στην είσοδο της οποίας μπαίνουν χ και από την έξοδό της βγαίνουν y.
Στην τάξη αυτή, όπως και στην προηγούμενη, εμφανίζονται οι διάφορες μορφές αναπαράστασης της έννοιας αυτής, με τις αντίστοιχες ασκήσεις να κινούνται στα ίδια πλαίσια με την προηγούμενη τάξη. Γίνεται όμως προσπάθεια να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στην εύρεση κάποιων πληροφοριών που υπάρχουν στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, όπως μέγιστη και ελάχιστη τιμή της, και το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων κάποιων συναρτήσεων, όπως η $y=αχ+β$ και η $y=αχ^2$.
Η συμμετρίας ως προς άξονα επανέρχεται αρχικά μέσω μιας άσκησης, στην οποία ζητείται από τα παιδιά να σχεδιάσουν τις ευθείες $y=3χ$ και $y=-3χ$ και να δικαιολογήσουν ότι είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα χ΄χ (;).
Συνεχίζοντας, στη μελέτη της παραβολής $y=αχ^2$, αναφέρεται ότι η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, παρουσιάζοντας αρχικά τη γραφική παράσταση της $y=χ^2$. Δίνοντας εκεί συγκεκριμένες αντίθετες τιμές στο χ, το 2 και το -2 υπολογίζονται οι αντίστοιχες τιμές του y και διαπιστώνεται ότι είναι ίσες με 4. Οπότε τα σημεία της παραβολής Μ(2,4) και Μ΄(-2,4) είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y. Έτσι δίνεται το δικαίωμα γενίκευσης (;): *για κάθε σημείο Ρ(χ, y) της παραβολής* $y=χ^2$*, το συμμετρικό του Ρ΄(-χ, y) ως προς τον άξονα y΄y, είναι επίσης σημείο της παραβολής.*
Κατόπιν διαπιστώνεται από το σχήμα ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=-χ^2$, η οποία είναι και αυτή παραβολή, έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.
Ακολουθεί η γενίκευση ότι η γραφική παράσταση της $y=αχ^2$ με $α>0$ ή $α<0$ είναι παραβολή που έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Τέλος, παρουσιάζοντας σε σχήμα τις γραφικές παραστάσεις των παραβολών $y=χ^2$ και $y=-χ^2$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, αναφέρεται ότι αυτές είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα χ΄χ. Στις αντίστοιχες εφαρμογές και ασκήσεις δίνεται σε σχήμα ένα τμήμα (το μισό) της γραφικής παράστασης της παραβολής $y=αχ^2$(αναφέρεται ρητά ο όρος ‘παραβολή’) και ζητείται να σχεδιαστεί το υπόλοιπο. Επίσης ζητείται να σχεδιαστούν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων κάποιες γραφικές παραστάσεις παραβολών της μορφής $y=αχ^2$ για συγκεκριμένες τιμές του α που είναι αντίθετες (συμμετρικές ως προς τον άξονα χ΄χ).
Κάνοντας μια προσπάθεια παρουσίασης της γενικής μορφής της τετραγωνικής συνάρτησης $y=αχ^2+βχ+γ$, $α\neq0$ γίνεται μελέτη της σε

συγκεκριμένο διάστημα μεταβολής του χ με συγκεκριμένα παραδείγματα, κατασκευάζοντας πίνακα τιμών της κάθε συνάρτησης με χ συμμετρικά ως προς την τετμημένη της κορυφής. Σχεδιάζεται λοιπόν η αντίστοιχη κάθε φορά γραφική παράσταση από την οποία φαίνεται ότι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της παραβολής αποτελεί άξονα συμμετρίας της. Η βαρύτητα που δίνεται από το βιβλίο και της αντίστοιχες οδηγίες θεωρούμε ότι είναι προς τη μεριά άλλων ιδιοτήτων της παραβολής, όπως τα ακρότατα, και όχι προς τη συμμετρία.

Στην <u>Α΄ Λυκείου</u>, η συμμετρία ως προς άξονα εμφανίζεται στα πλαίσια και των δύο κλάδων των Μαθηματικών, που διδάσκονται στην τάξη αυτή, τη Γεωμετρία και την Άλγεβρα.
Στη Γεωμετρία, ορίζονται δύο σημεία ως συμμετρικά ως προς ευθεία *ε* όταν αυτά αποτελούν άκρα ενός ευθ. τμήματος, στο οποίο η *ε* είναι μεσοκάθετος. Κατόπιν αναφέρεται ο τρόπος κατασκευής του συμμετρικού ενός σημείου ως προς ευθεία που είναι ο ίδιος με αυτόν της Γ΄ Γυμνασίου. Ακολούθως ορίζονται δύο σχήματα Σ, Σ΄ ως συμμετρικά ως προς ευθεία *ε,* όταν το καθένα αποτελείται από τα συμμετρικά σημεία του άλλου ως προς ευθεία *ε*. Σε αυτή την περίπτωση το σχήμα που αποτελείται από τα Σ και Σ΄ λέμε ότι έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία *ε*.
Δηλαδή **μια ευθεία *ε* λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α΄, ως προς την ευθεία *ε,* είναι σημείο του σχήματος.** (σελ. 51 ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου)
Αν ένα σχήμα, αναφέρεται, έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία *ε,* τότε η *ε* χωρίζει το σχήμα με τέτοιο τρόπο, ώστε αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της *ε* τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.
Μετά περιγράφονται γνωστά σχήματα που έχουν άξονα συμμετρίας, όπως το ευθ. τμήμα που έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετο και το φορέα του, η ευθεία που έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία κάθετη προς αυτή καθώς και την ίδια την ευθεία, ο κύκλος με άξονα συμμετρίας τον φορέα κάθε διαμέτρου του, το ισοσκελές τρίγωνο με άξονα συμμετρίας τον φορέα του ύψους του προς τη βάση και το ισόπλευρο τρίγωνο με άξονες συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του.
Τελειώνοντας την αναφορά στην αξονική συμμετρία δίνονται ασκήσεις εύρεσης άξονα συμμετρίας κάποιων κεφαλαίων γραμμάτων της ελληνικής αλφαβήτου καθώς και κάποιες αποδεικτικές.

Στην Άλγεβρα, αποδεικνύεται αρχικά ότι το συμμετρικό ενός σημείου Μ(α,β) του Καρτεσιανού επιπέδου ως προς τον άξονα χ΄χ είναι το Μ΄(α,-β), ως προς τον άξονα y΄y είναι το Μ΄΄(-α,β)) και ως προς την ευθεία y=χ είναι το Μ΄΄΄(β,α)) (σελ 69-70). Σε άσκηση ζητείται να βρεθεί το συμμετρικό του Α(-1,3) ως προς τον άξονα χ΄χ και ως προς τη διχοτόμο της γωνίας χογ.

Στη σελ. 71 διατυπώνεται και ο ορισμός: **ένα σημείο Μ(χ,y) του επιπέδου των αξόνων ανήκει στη γραφική παράσταση της f, μόνο όταν y=f(χ).**
Κατόπιν στα πλαίσια της μελέτης της f(χ)= χ^2 (σελ.80) αναφέρεται ότι ο άξονας y΄y είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής της παράστασης διότι <u>για κάθε χ $\in$R τα σημεία Μ(χ,f(x)) και Μ΄(-χ,f(χ)), που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, ανήκουν στη γραφική παράσταση της f ,αφού για αυτά ισχύει f(x)= f(-x) για κάθε χ $\in$R.</u>
Σε αυτό το σημείο γίνεται αναφορά στην <u>άρτια</u> συνάρτηση και στη χρήση της συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y, αφού χάρη σε αυτήν η μελέτη μιας άρτιας συνάρτησης μπορεί να περιοριστεί στο διάστημα $[0, +\infty)$.
Λίγο πιο κάτω διαπιστώνεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των αντίθετων συναρτήσεων f(χ)= χ^2 και g(χ)=- χ^2 είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα χ΄χ, ενώ γίνεται ταύτιση της έννοιας της άρτιας συνάρτησης με τη συμμετρία της γραφικής της παράστασης ως προς τον άξονα y΄y .
Αναφέρεται δε γενικότερα ότι για αντίθετες τιμές του α, από τη σχέση y= $\alpha\chi^2$, έχουμε δύο παραβολές συμμετρικές ως προς τον άξονα χ΄χ.
Στις οδηγίες διδασκαλίας προτείνεται να διδαχτεί η f(χ) = χ^2 αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι είναι άρτια, οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, και μετά να γίνει η μελέτη και η γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, +\infty)$. Κάνοντας δε χρήση της παραπάνω συμμετρίας να χαραχθεί η γραφική παράσταση της f σε όλο το R και να εξαχθούν τα συμπεράσματα για τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

Με αφορμή τη μελέτη της συνάρτησης f(χ)= $\frac{1}{x}$ γίνεται αναφορά στη συμμετρία ως προς την ευθεία y= χ. Αποδεικνύεται ότι αν κάποιο σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f τότε και το Ν(β,α) θα ανήκει στη γραφική παράσταση της και επειδή τα σημεία Μ(α,β) και Ν(β,α) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία y= χ, η γραφική παράσταση της f έχει την ευθεία αυτή άξονα συμμετρίας (σελ.88).
Επίσης αναφέρεται ότι ευθεία y= -χ είναι άξονας συμμετρίας της g(χ)=$\frac{-1}{x}$.

Στις αντίστοιχες ασκήσεις γίνεται προσπάθεια εμπέδωσης των εννοιών αυτών στους μαθητές αφού δίνονται οι αλγεβρικοί τύποι ή οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και ζητείται να βρεθεί αν αυτές είναι άρτιες ή αν ο άξονας y΄y αποτελεί άξονα συμμετρίας τους ή και να συμπληρωθεί το υπόλοιπο μέρος που λείπει από μια γραφική παράσταση στην περίπτωση που αυτή είναι άρτια.

Επίσης γίνεται μελέτη της f(χ) = αχ^2+βχ+γ, α≠0 (με παράλληλη και οριζόντια μετατόπιση της y = αχ^2) και αναφέρεται ότι αυτή είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία χ=-$\frac{b}{2a}$(σελ.136).

Τέλος, αναφέρεται ότι **για τη μελέτη** μιας συνάρτησης **αναζητούμε συμμετρίες**, γεγονός που σημαίνει ότι στο σχολικό βιβλίο επισημαίνεται πιθανή εφαρμογή της συμμετρίας στη μελέτη συνάρτησης (σελ. 90).
Όσον αφορά την παρουσία σχετικών προβλημάτων θα λέγαμε ότι δεν είναι σημαντική, αφού υπάρχουν λίγα από αυτά.
Δύο αξιόλογα προβλήματα που αναφέρονται στο βιβλίο αυτό είναι:
Α) ο υπολογισμός του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(χ)= $|χ|$ - 4 και g(χ)= 4- $|χ|$.
Β) η εύρεση της εξίσωσης της ανακλώμενης στον άξονα χ΄χ ευθείας φωτεινής ακτίνας, η οποία (φωτεινή ακτίνα) κινείται κατά μήκος της ευθείας y=1-χ.

Στη <u>Β΄ Λυκείου</u>, στην Άλγεβρα, μελετάται η συνάρτηση f(χ) = συνχ. Αναφέρεται ότι η γραφική της παράσταση παρουσιάζει άξονα συμμετρίας τον άξονας y΄y αφού είναι άρτια συνάρτηση.

Με αφορμή τη μελέτη των συναρτήσεων f(χ) =2^x και g(χ)=($\frac{1}{2}$)^x διαπιστώνεται ότι ισχύει g(χ)= f(-χ) για κάθε χ $\in$R και προκύπτει το συμπέρασμα ότι οι γραφικές τους παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα y΄y.(σελ. 126)
Επίσης αποδεικνύεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y=log$_a$x και y=a^x είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=χ αφού αν ένα σημείο Μ(ξ,η) ανήκει στη γραφική παράσταση της πρώτης τότε το σημείο Ν(η,ξ), που είναι συμμετρικό του Μ(ξ,η) ως προς την y=χ, ανήκει στη γραφική παράσταση της δεύτερης.
Στα Μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης της ίδιας τάξης μελετώνται κωνικές με κέντρο την αρχή των αξόνων. Αποδεικνύεται ότι η παραβολή y^2=2pχ (δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης) έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα χ΄χ και ότι η παραβολή χ^2 =2py έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1 όπως και η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2}$=1 (δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων) έχουν ως άξονα συμμετρίας τον άξονα χ΄χ και τον y΄y. Η απόδειξη γίνεται λαμβάνοντας κάθε φορά ένα τυχαίο σημείο της αντίστοιχης καμπύλης και δείχνοντας ότι το συμμετρικό του ως προς τον άξονα χ΄χ ή τον y΄y ανήκει στην καμπύλη αυτή.
Όπως για την Α΄ Λυκείου έτσι και για τη Β΄ ισχύει η πολύ μικρή παρουσία σχετικών προβλημάτων.

Ένα αξιόλογο πρόβλημα του βιβλίου αυτού είναι: Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β της παραβολής $y = \frac{1}{4}\chi^2$ που έχουν την ίδια τεταγμένη και ισχύει γων.ΑΟΒ = 90° .

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω θα μπορούσαμε να πούμε ότι από τη Β΄ Γυμνασίου οι μαθητές διδάσκονται την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα οπτικά-κινητικά (διπλώνοντας το χαρτί του σχεδίου πάνω στην ευθεία που αποτελεί άξονα συμμετρίας), ενώ εισάγεται και η έννοια της

συνάρτησης με όλες (πλην του βελοδιαγράμματος) της μορφές αναπαράστασής της.
Στη Γ΄ Γυμνασίου συνδέονται οι δύο έννοιες (οπτικά, με σχήματα) αφού αναφέρονται συγκεκριμένες συναρτήσεις που έχουν άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y ή ευθεία της μορφής $\chi=\chi_0$ (η παραβολή) ή την ευθεία $y=\chi$ (η υπερβολή). Γίνεται και μια προσπάθεια σύνδεσης της συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τη συμβολική της έκφραση.
Στην Α΄ Λυκείου τα πράγματα γίνονται πιο ξεκάθαρα (τυποποιούνται) αφού εκεί δίνονται σαφείς ορισμοί των παραπάνω εννοιών (ξεχωριστά ο καθένας) και συνδέεται η γεωμετρική πλευρά της συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y μιας συνάρτησης με τον αντίστοιχο αλγεβρικό ορισμό. Επίσης με αρκετά παραδείγματα ή και ασκήσεις επιχειρείται η μετάφραση από τη γεωμετρική αναπαράσταση της έννοιας στην αλγεβρική και αντίστροφα.
Η αντίστοιχη αναπαράσταση με πίνακα τιμών χρησιμοποιείται μόνο βοηθητικά για το σχεδιασμό της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Η τελευταία παρατήρηση θα λέγαμε ότι εκφράζει το πνεύμα το οποίο διατρέχει τα σχολικά βιβλία όλων των τάξεων.
Στη Β΄ Λυκείου ουσιαστικά γίνεται εφαρμογή των προηγούμενων με παρόμοια φιλοσοφία, δηλ συσχέτιση της γεωμετρικής αναπαράσταση της έννοιας με την αλγεβρική, ενώ πάλι ο πίνακας τιμών χρησιμοποιείται μόνο βοηθητικά.
Για τους μαθητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης της ίδιας τάξης δίνεται η δυνατότητα περισσότερου αλγεβρικού χειρισμού της έννοιας της συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y και χ΄χ έστω και αν οι καμπύλες που μελετώνται μπορεί να μην αποτελούν γραφική παράσταση συνάρτησης.

Αξίζει τέλος να επισημάνουμε ότι σε όλα τα προαναφερθέντα βιβλία η παρουσία προβλημάτων που σχετίζονται με άξονα συμμετρίας συνάρτησης, είναι ασήμαντη.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, έχοντας διδαχτεί οι μαθητές όλα τα προηγούμενα, κάναμε την εικασία ότι οι μαθητές στο τέλος της Β΄

Λυκείου θα πρέπει να μπορούν να βρίσκουν το συμμετρικό ενός σημείου του επιπέδου, όπως π.χ. το Α(2, 5), ως προς τον άξονα x΄x, τον άξονα y΄y και την ευθεία y=x. Έχοντας κατανοήσει καλλίτερα την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα εικάσαμε ότι θα μπορούσαν να βρουν το συμμετρικό του σημείου αυτού και ως προς άξονες τις ευθείες x=1και y=1 (ερώτηση 3 ερωτηματολογίου).

Θα μπορούσαν επίσης να διακρίνουν αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας κάποια κατακόρυφη ευθεία (ερώτηση 6 ερωτηματολογίου), ή να συμπληρώσουν το τμήμα της γραφικής παράστασης που λείπει, όταν δίνεται ένα μέρος της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, στην περίπτωση που αυτή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y (ερώτηση 4 ερωτηματολογίου).

Υποθέσαμε επίσης ότι θα μπορούσαν να γράψουν τον τύπο μιας συνάρτησης που έχει άξονα συμμετρίας (ερώτηση 5 ερωτηματολογίου), όπως και να αναγνωρίσουν από τον τύπο της μια συνάρτηση που έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y και να αιτιολογήσουν το γιατί (ερώτηση 7 ερωτηματολογίου).

Ακόμη ότι θα μπορούσαν να αναφέρουν τη γενική σχέση που ισχύει για τον τύπο μιας συνάρτησης f, στην περίπτωση που αυτή έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, ιδιαίτερα αν συνέδεαν τη συμμετρία αυτή με τον όρο "άρτια" που δεν δόθηκε από εμάς, αλλά το έχουν διδαχτεί (ερώτηση 2 ερωτηματολογίου).

Για τον ορισμό του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης (ερώτηση 1 ερωτηματολογίου) αναμέναμε τα πράγματα να μην είναι τόσο εύκολα αφού άμεσος ορισμός δεν αναφέρεται στα σχολικά βιβλία, αλλά θα έπρεπε να συνδυάσουν σχετικούς ορισμούς που έχουν διδαχτεί, πράγμα που θα σήμαινε λεκτική διατύπωση της ζητούμενης έννοιας, την οποία θα έπρεπε πρώτα να έχουν κατανοήσει σε βάθος (μετάφραση από την αλγεβρική και γεωμετρική αναπαράσταση της έννοιας στην λεκτική) .

Θεωρώντας ότι δεν έχει δοθεί αρκετό βάρος στη διδασκαλία του πίνακα τιμών συνάρτησης μάλλον δεν αναμέναμε σημαντικά αποτελέσματα από την ερώτηση 8 του ερωτηματολογίου.

Τέλος στην ερώτηση 9 του ερωτηματολογίου ετέθη πρόβλημα που για την επίλυσή του θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η συμμετρία της παραβολής ως προς τον άξονά της. Το αποτέλεσμα για την τελευταία ερώτηση ήταν ότι ένας μαθητής το έλυσε με άλλον τρόπο, ενώ ένας μόνο με χρήση της παραπάνω συμμετρίας.

7. Η ΕΡΕΥΝΑ ΜΑΣ

7.1. ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΣ ΔΙΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ-ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Θεωρώντας ότι η κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας συνδέεται με τον ορισμό της και με παραδείγματα που μπορούν να δώσουν οι μαθητές για την έννοια αυτή στις διάφορες μορφές αναπαράστασής της καθώς και ότι σχετίζεται με την ικανότητα αναγνώρισής της όταν αυτή παρουσιάζεται με περισσότερες από μια διαφορετικές εξωτερικές αναπαραστάσεις,
θελήσαμε να εξετάσουμε τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην επιτυχή αντιμετώπιση έργων των παραπάνω μορφών με την κατανόηση της έννοιας καθώς και με την επιτυχία επίλυσης προβλήματος.
Πολλές έρευνες στο εξωτερικό (π.χ. Artigue, 1992: Hitt, 1998) καταδεικνύουν ότι μαθητές του Λυκείου αλλά και φοιτητές Μαθηματικών αποφεύγουν ορισμένα είδη αναπαράστασης της έννοιας της συνάρτησης, όπως για παράδειγμα τη γραφική παράσταση, ενώ ευνοούν άλλα, όπως την αλγεβρική έκφραση. Αλλά και στην Ελλάδα, όπως και στην Κύπρο, τα διδακτικά εγχειρίδια, αλλά και οι επιστημολογικές αντιλήψεις των καθηγητών Μαθηματικών δίνουν έμφαση στην επεξεργασία της αλγεβρικής έκφρασης χωρίς να ενθαρρύνεται η επεξεργασία της γραφικής παράστασης (Καλδρυμίδου & Οικονόμου). Από τη διδακτική μας εμπειρία θα προσθέταμε ότι και ο πίνακας τιμών είναι μια αναπαράσταση της έννοιας της συνάρτησης, την οποία δεν επεξεργαζόμαστε αρκετά.

Εμείς θελήσαμε να εξετάσουμε μια συγκεκριμένη κατηγορία συναρτήσεων, αυτές με άξονα συμμετρίας. Θεωρώντας ότι για την κατηγορία αυτή ισχύουν όσα ήδη έχουμε αναφέρει για τις συναρτήσεις θέσαμε τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα :

- Ποιος είναι ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας.
- Επίσης θελήσαμε να εξετάσουμε το ρόλο του ορισμού, των παραδειγμάτων και σχετικών έργων στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας.
- Επιπρόσθετα προσπαθήσαμε να συσχετίσουμε όλα τα παραπάνω με την επίλυση προβλήματος.

Γνωρίζοντας ότι οι μαθητές της Β΄ Λυκείου έχουν διδαχτεί την έννοια της συνάρτησης, την έννοια της συμμετρίας ως προς άξονα όπως και την έννοια της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας θελήσαμε να διερευνήσουμε τι έχουν κατανοήσει τελικά από τις παραπάνω έννοιες. Γνωρίζαμε ότι οι σχετικές έννοιες είχαν διδαχτεί σε διάφορες τάξεις του σχολείου, αλλά και σε ‘διάσπαρτα κομμάτια’ γεγονός που θα τους δυσκόλευε να δώσουν απαντήσεις σε κάποια από αυτά που ζητούσαμε, αφού ορισμένα από αυτά θα έπρεπε να τα έχουν κατανοήσει συνδέοντας όλα αυτά τα ‘διάσπαρτα κομμάτια’.

Η έρευνά μας λοιπόν περιελάμβανε τρεις διαστάσεις.

- Η πρώτη διάσταση αφορούσε στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας όταν αυτή δινόταν σε μορφή γραφικής παράστασης, συμβολικής έκφρασης (αλγεβρικός τύπος) και πίνακα τιμών.
- Η δεύτερη διάσταση αφορούσε στην εννοιολογική κατανόηση του άξονα συμμετρίας μιας συνάρτησης. Αυτή η κατανόηση έγινε προσπάθεια να προσεγγιστεί μέσω του ορισμού, παραδειγμάτων των μαθητών καθώς και διαφόρων εκφράσεων που εμπλέκουν την ιδιότητα του άξονα συμμετρίας.
- Η τρίτη αφορούσε στη διάσταση προβλήματος που εμπλέκει συνάρτηση με άξονα συμμετρίας.

Ο βασικός στόχος της μελέτης αυτής είναι να συνδυάσει τις τρεις παραπάνω διαστάσεις και να προτείνει ένα διδακτικό μοντέλο προσέγγισης των συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας που να εμπλέκει τις τρεις αυτές διαστάσεις.
Κατασκευάσαμε λοιπόν ένα σχετικό ερωτηματολόγιο, το οποίο παρατίθεται στο παράρτημα, και το δώσαμε σε 139 μαθητές της Β΄ Λυκείου, θετικής, τεχνολογικής και θεωρητικής κατεύθυνσης, δύο σχολείων του Χαϊδαρίου (1^{ο} και 2^{ο} Ενιαίο Λύκειο Χαϊδαρίου). Το ερωτηματολόγιο δόθηκε και συμπληρώθηκε ταυτόχρονα από όλους τους μαθητές του κάθε σχολείου, στο χώρο του σχολείου τους κατά τη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας με την επιτήρηση των διδασκόντων την ώρα εκείνη.
Μετά διορθώθηκε προσεκτικά και αφού καθορίστηκαν οι αντίστοιχες μεταβλητές (κωδικοποίηση), τα αποτελέσματα καταχωρήθηκαν στο EXCEL.

7.2. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ

Την έρευνα την επεξεργαστήκαμε στατιστικά με τη βοήθεια του EXCEL και με τη μέθοδο Gras.

Από τη μέθοδο Gras χρησιμοποιήσαμε δύο διαγράμματα, το διάγραμμα ομοιότητας και το συνεπαγωγικό διάγραμμα.

Το **διάγραμμα ομοιότητας** παρουσιάζει τις διάφορες μεταβλητές του ερωτηματολογίου σε ομάδες. Κάθε ομάδα περιέχει μεταβλητές, τις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή πετυχαίνουν ή αποτυχαίνουν σε αυτές ταυτόχρονα. Αυτή η ομαδοποίηση μπορεί να οφείλεται στον εννοιολογικό χαρακτήρα της κάθε ομάδας μεταβλητών.

Η κατασκευή του διαγράμματος ομοιότητας βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία: δύο μεταβλητές ενός συνόλου μεταβλητών, που είναι οι πιο όμοιες μεταξύ τους σε σχέση με τους δείκτες ομοιότητας της μεθόδου, συνδέονται μεταξύ τους σε μια ομάδα στο υψηλότερο (πρώτο) επίπεδο ομοιότητας. Μετά, αυτή η ομάδα μπορεί να συνδέεται με μια μεταβλητή σε ένα χαμηλότερο επίπεδο ομοιότητας ή δυο άλλες που συνδυάζονται μεταξύ τους και δημιουργούν μια άλλη ομάδα σε χαμηλότερο επίπεδο κ.ο.κ. Αυτή η διαδικασία ομαδοποίησης συνεχίζεται έως ότου η ομοιότητα ή η συνοχή (cohesion) μεταξύ των μεταβλητών ή των ομάδων των μεταβλητών γίνει πολύ ασθενής.

Το **συνεπαγωγικό διάγραμμα** συνδέει διάφορες μεταβλητές με βέλη. Για παράδειγμα η ‘συνεπαγωγή’ Pr $\rightarrow$S3 σημαίνει ότι όσοι έχουν επιτυχία στο έργο στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή Pr θα έχουν επιτυχία και στο έργο στο οποίο αναφέρεται η μεταβλητή S3.

Το συνεπαγωγικό διάγραμμα έχει να κάνει με συνεπαγωγική στατιστική ανάλυση που σκοπό έχει να δώσει στατιστικό νόημα σε εκφράσεις σαν την: «Αν παρατηρούμε τη μεταβλητή a σε ένα θέμα τότε παρατηρούμε (και) τη μεταβλητή b στο ίδιο θέμα». Έτσι η υποκείμενη αρχή της συνεπαγωγικής ανάλυσης στηρίζεται στην μερική συνεπαγωγή (quasi-implication): «Αν a είναι αληθής τότε b είναι περισσότερο ή λιγότερο αληθής».

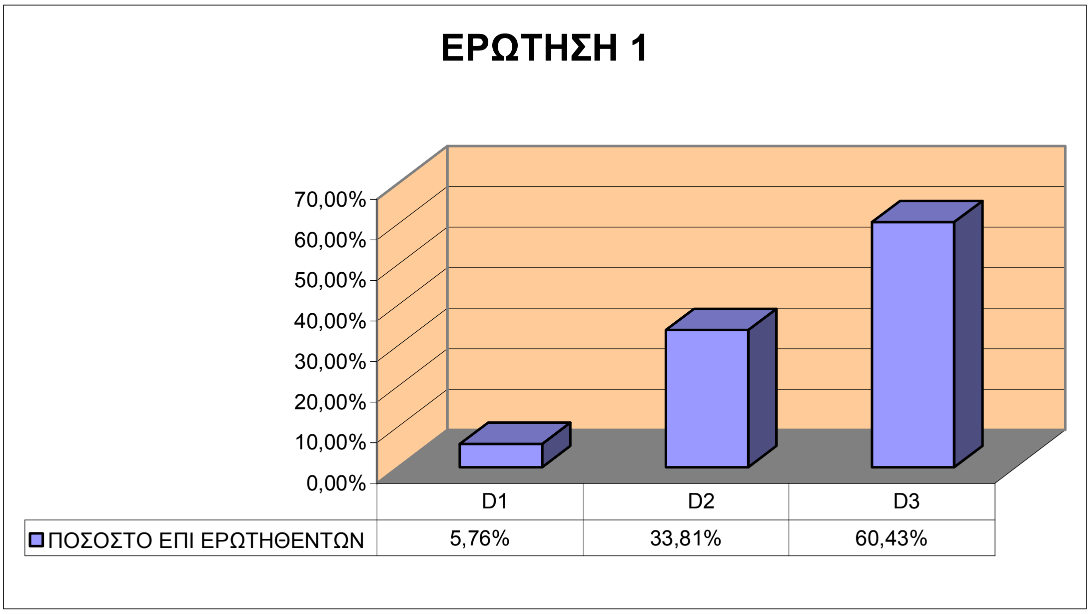
Ένα συνεπαγωγικό διάγραμμα αναπαριστάνει γραφικά το δίκτυο των μερικών συνεπαγωγικών σχέσεων μεταξύ των μεταβλητών ενός συνόλου μεταβλητών.

7.3. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΜΕΣΩ EXCEL ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΠΑΝΩ ΣΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ερώτηση 1. Η πρώτη ερώτηση ζητούσε τον ορισμό: 'Πότε μια ευθεία *ε* λέγεται άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης'.
Αναμέναμε λεκτική διατύπωση της έννοιας του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν:

D1 Σωστός θεωρητικά ή σχεδόν σωστός ορισμός με παράδειγμα.
D2 Αόριστος ορισμός
D3 Λανθασμένος ή καθόλου ορισμός.

Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:
Δεν δόθηκε καθόλου ορισμός ή απάντησαν λάθος 84 μαθητές ή ποσοστό 60,43 % .
Ένα πλήθος από 47 μαθητές ή ποσοστό 33,81 % έδωσαν αόριστη ή ασαφή απάντηση.
Τέλος μόνο 8 μαθητές ή ποσοστό 5,76 % έδωσαν σωστό ορισμό.
Αυτό που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι ο ορισμός που ζητούσαμε δεν υπάρχει αυτούσιος μέσα στα σχολικά βιβλία. Προκύπτει έμμεσα από κατάλληλο συνδυασμό ορισμών που έχουν διδαχτεί στην άλγεβρα και στη γεωμετρία όχι μόνο της τάξης στην οποία φοιτούσαν οι μαθητές, αλλά και προηγούμενων τάξεων. Αυτό όμως προϋποθέτει βαθιά κατανόηση της έννοιας του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης και φυσικά την ικανότητα της λεκτικής διατύπωσης της.



Όπως φάνηκε από τα παραπάνω αποτελέσματα (ποσοστό επιτυχίας 5,76 %) ένα τέτοιου είδους ερώτημα, το οποίο συνδυάζει εννοιολογική κατανόηση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης (που προκύπτει από γνώσεις που αποκτώνται μέσα σε βάθος χρόνου) με λεκτική διατύπωση, δυσκολεύει πολύ τους μαθητές.

<u>Ερώτηση 2</u>. Τη δεύτερη ερώτηση την χαρακτηρίσαμε ως 'ορισμό στην πράξη' αφού με αυτή θέλαμε να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει και μπορούν να εφαρμόσουν τον ορισμό που ζητήθηκε στο πρώτο ερώτημα, στην ειδική περίπτωση που η συνάρτηση y=f(x) με πεδίο ορισμού το **R** έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

Αναμέναμε οι μαθητές να δώσουν ως απάντηση την αλγεβρική σχέση που προκύπτει από τον ορισμό του προηγούμενου ερωτήματος για άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

Δίναμε τέσσερις επιλογές και ρωτούσαμε ποια (ποιες) από αυτές είναι σωστή (σωστές). Οι επιλογές ήταν οι παρακάτω:

α) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με –x.
β) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με x.
γ) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με f(-x).
δ) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με -f(x).

Η σωστή απάντηση ήταν η γ.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν: Da, Db, Dc, Dd για το αν το ερώτημα α, β, γ, δ απαντήθηκε ή όχι με τιμές 1 και 0 αντίστοιχα.

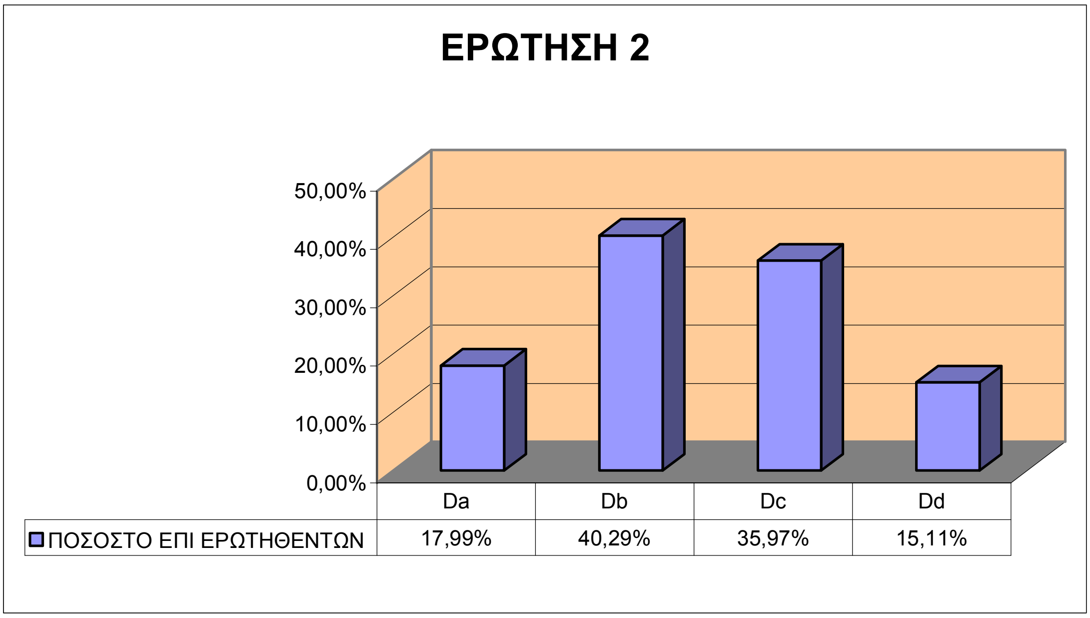
Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:

Κάποιοι μαθητές δεν έδωσαν καμία απάντηση ενώ κάποιοι απάντησαν σε δύο. Πιο συγκεκριμένα 17 δεν έδωσαν καμία απάντηση, 92 απάντησαν μόνο σε μία ενώ 30 μαθητές απάντησαν σε δύο.

Το ερώτημα α το επέλεξαν 25 μαθητές ή ποσοστό 17,99 %, το ερώτημα β το επέλεξαν 56 ή ποσοστό 40,29 %, το ερώτημα γ το επέλεξαν 50 ή ποσοστό 35,97 % και τέλος το ερώτημα δ το επέλεξαν 21 μαθητές ή ποσοστό 15,11 %.

Αξιοσημείωτο είναι ότι κάποιοι μαθητές συσχέτισαν την έννοια του άξονα y΄y ως άξονα συμμετρίας της συνάρτησης με τον όρο 'άρτια συνάρτηση', και έτσι έδωσαν ως απάντηση την αλγεβρική έκφραση της 'άρτιας συνάρτησης', δηλαδή την απάντηση γ.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι το έργο του 'ορισμού στην πράξη' του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, για την ειδική περίπτωση που αυτός είναι ο άξονας y΄y, είναι δύσκολο (μόνο το 35,97 % το επέτυχε). Το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών έδειξε να μην αντιλαμβάνεται τη συσχέτιση των αλγεβρικών εκφράσεων που δόθηκαν με την έννοια του άξονα y΄y ως άξονα συμμετρίας της συνάρτησης.

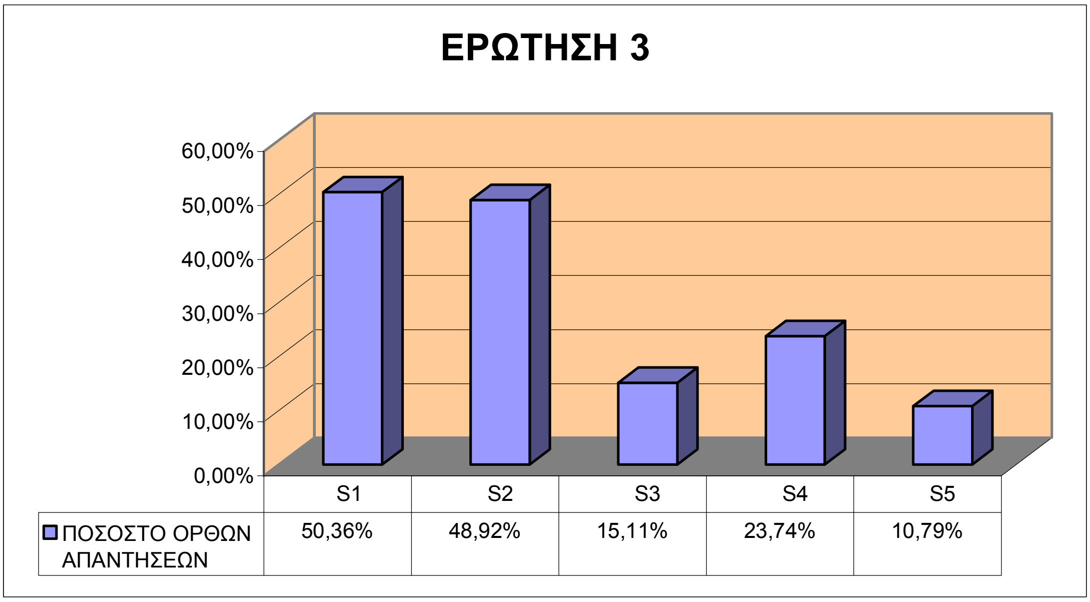


<u>Ερώτηση 3</u>. Με την ερώτηση 3 θέλαμε να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να βρουν το συμμετρικό ενός σημείου με δεδομένες τις συντεταγμένες, ως προς διάφορους άξονες. Πιο συγκεκριμένα δόθηκε το σημείο Α(2, 5) και ζητήθηκε να βρεθεί το συμμετρικό του ως προς:

α) τον άξονα x΄x,
β) τον άξονα y΄y,
γ) την ευθεία y=x,
δ) την ευθεία x=1,
ε) την ευθεία y=1.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν: S1, S2, S3, S4, S5 για τα υποερωτήματα α, β, γ, δ, ε αντίστοιχα με τιμές 0 και 1 για λανθασμένο ή σωστό προσδιορισμό του εκάστοτε ζητούμενου συμμετρικού.
Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:
Το συμμετρικό του σημείου ως προς τον άξονα x΄x το βρήκαν σωστά 70 μαθητές ή ένα ποσοστό 50,36 %.
Το συμμετρικό του σημείου ως προς τον άξονα y΄y το βρήκαν σωστά 68 μαθητές ή ένα ποσοστό 48,92 %.
Το συμμετρικό του σημείου ως προς την ευθεία y=x το βρήκαν σωστά 21 μαθητές ή ένα ποσοστό 15,11 %.
Το συμμετρικό του σημείου ως προς την ευθεία x=1 το βρήκαν σωστά 33 μαθητές ή ένα ποσοστό 23,74 %.
Τέλος το συμμετρικό του σημείου ως προς την ευθεία y=1 το βρήκαν σωστά 15 μαθητές ή ένα ποσοστό 10,79 %.
Αξιοσημείωτο είναι ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά ορθών απαντήσεων δόθηκαν για την εύρεση του συμμετρικού του σημείου στις περιπτώσεις που άξονας συμμετρίας είναι ο x΄x ή ο y΄y, δηλαδή οι άξονες συντεταγμένων.

Αν εξετάσουμε τις απαντήσεις σε σχέση με τη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας (οριζόντιος-κατακόρυφος- πλάγιος) διαπιστώνουμε ότι οι περισσότερες ορθές απαντήσεις δόθηκαν για την περίπτωση που άξονας είναι ο οριζόντιος άξονας x΄x, ενώ ακολουθεί με μικρή διαφορά ο άξονας y΄y. Συνολικά φαίνεται ότι οι μαθητές τα κατάφεραν καλλίτερα να βρουν επιτυχώς το συμμετρικό σημείου ως προς κατακόρυφο άξονα (άξονας y΄y ή η ευθεία x=1) με συνολικό ποσοστό 72,66 % , παρά ως προς οριζόντιο (άξονας x΄x ή η ευθεία y=1) με συνολικό ποσοστό 61,15 %. Φαίνεται λοιπόν ότι οι μαθητές έχουν μεγαλύτερη ευχέρεια στην εύρεση συμμετρικού ενός σημείου ως προς κατακόρυφο άξονα παρά ως προς οριζόντιο άξονα.
Αναφορικά με τον πλάγιο άξονα y=x φαίνεται ότι βρίσκεται ‘μετά’ τις δύο περιπτώσεις κατακόρυφου άξονα που εξετάσαμε και ‘μετά’ την περίπτωση του οριζόντιου x΄x, ενώ βρίσκεται ‘πριν’ από αυτή του οριζόντιου y=1’.



Τα παραπάνω αποτελέσματα επιβεβαιώνουν στο μεγαλύτερο μέρος τους τα ευρήματα των Hoyles και Healy (1997), ότι η εύρεση συμμετρικού ενός αντικειμένου σε οριζόντιο ή κατακόρυφο άξονα ήταν πιο εύκολη για τους μαθητές από αυτήν σε πλάγιο άξονα συμμετρίας.

Συνοψίζοντας τα ευρήματα του παραπάνω ερωτήματος θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές βρίσκουν ευκολότερα τα συμμετρικά σημείου ως προς τους δύο βασικούς άξονες x΄x και y΄y, ενώ το έργο αυτό για κατακόρυφο άξονα φαίνεται να είναι ευκολότερο από το αντίστοιχο για οριζόντιο ή πλάγιο.

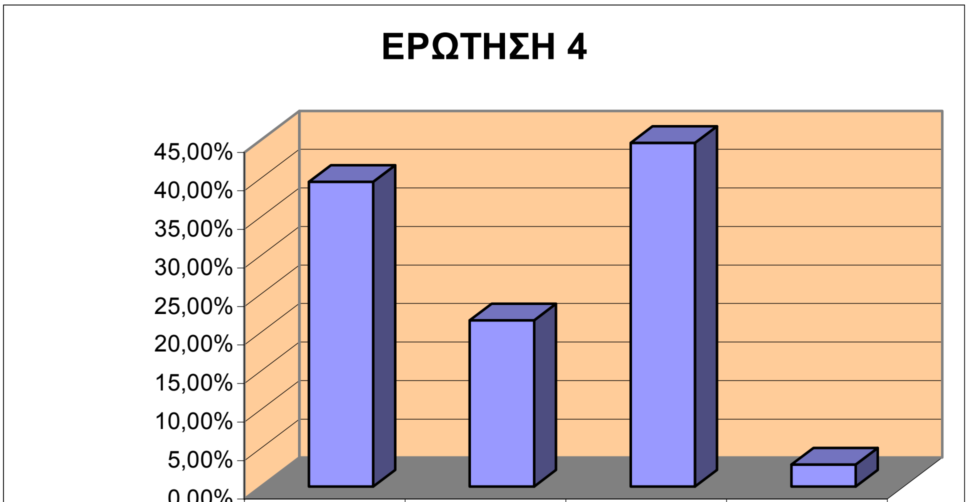
Ερώτηση 4. Στην ερώτηση 4 δόθηκε ένα **μέρος** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης που είχε άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y και ζητήθηκε να βρεθεί το **υπόλοιπο** τμήμα της, το οποίο αποτελούσε μια από τέσσερις δοθείσες επιλογές (βλέπε παράρτημα- ερωτηματολόγιο). Η σωστή απάντηση ήταν η γ.

Με το ερώτημα αυτό θέλαμε να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν ή να αναγνωρίσουν σωστά συνάρτηση με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή.
Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν: Cga, Cgb, Cgc, Cgd με τιμές 1, 0 ανάλογα με το αν έδωσαν ως απάντηση ή όχι αντίστοιχα στην ερώτηση α, β, γ, δ.
Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:
Δύο μαθητές δεν έδωσαν καμιά απάντηση, 12 έδωσαν από 2 απαντήσεις ενώ υπήρξε και ένας μαθητής που έδωσε 3 απαντήσεις.
Το α, ως το υπόλοιπο τμήμα της γραφικής παράστασης που έλειπε, απαντήθηκε από 55 μαθητές ή ποσοστό 39,57 %, το β από 30 μαθητές ή ποσοστό 21,58 %, το γ, που ήταν η ορθή απάντηση, από 62 μαθητές ή ποσοστό 44,6 % και το δ από 4 μαθητές ή ποσοστό 2,88 %.
Αξίζει να παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι το μεγαλύτερο από τα παραπάνω ποσοστά (44,6 %) αντιστοιχεί στην ορθή απάντηση.
Όμως το αμέσως επόμενο (39,57 %) αντιστοιχεί στην απάντηση α, στην οποία το «υπόλοιπο τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης» είναι το συμμετρικό του δοθέντος τμήματος ως προς τον άξονα x΄x. Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι η τελική καμπύλη που προκύπτει μετά τη συμπλήρωση, αντί να έχει ως άξονα συμμετρίας τον y΄y έχει τον άξονα x΄x.
Φαίνεται δηλαδή ότι για τους μαθητές δεν έχουν αποσαφηνιστεί οι έννοιες της συμμετρίας καμπύλης ως προς άξονα τον x΄x ή τον y΄y.

Στην περίπτωση αυτή όμως προκύπτει και ένα ακόμη ζήτημα.
Η καμπύλη που σχηματίζεται μετά τη συμπλήρωση του δοθέντος τμήματος με αυτό που λείπει δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης, αφού έχει τον x΄x ως άξονα συμμετρίας.
Αυτό ίσως θα μπορούσε να αποτελεί ένδειξη ότι οι μαθητές συγχέουν τις έννοιες συνάρτηση-σχέση και αντίστοιχη καμπύλη.
Η εικασία αυτή επιβεβαιώνει τις απόψεις της A. Sierpinska, αλλά και άλλων ερευνητών (εργασία των Α. Γαγάτση, Π. Σπύρου, Α. Ευαγγελίδου και Ι. Ηλία) ότι η διάκριση ανάμεσα στην έννοια της σχέσης και της συνάρτησης δεν είναι εύκολη και αποτελεί εμπόδιο στη μάθηση.
Ένα άλλο αξιοσημείωτο γεγονός είναι ότι ένα ικανοποιητικό ποσοστό μαθητών (21,58 %) έδωσε ως απάντηση το β. Φυσικά η απάντηση είναι λανθασμένη, όμως αυτή αντιστοιχεί σε συνάρτηση που έχει **κέντρο συμμετρίας** το Ο, δηλαδή την αρχή των αξόνων. **Αναδύεται λοιπόν το**

ερώτημα μήπως για αρκετούς μαθητές δεν έχει γίνει σαφής ο διαχωρισμός των εννοιών ανάμεσα σε άξονα συμμετρίας και κέντρο συμμετρίας.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ίσως τελικά να υπάρχει ένα είδος σύγχυσης:
α) μέσα στο ίδιο είδος συμμετρίας π.χ. συμμετρία ως προς άξονα τον y΄y ή τον x΄x (έχουμε δηλαδή διαφοροποίηση ως προς το ποιος είναι ο άξονας ενώ η συμμετρία παραμένει αξονική), ένα είδος σύγχυσης που θα τολμούσαμε να το χαρακτηρίσουμε ως **ενδοσυμμετρική** σύγχυση **συμμετρίας** και
β) ανάμεσα σε διαφορετικά είδη συμμετρίας, δηλαδή συμμετρία ως προς άξονα ή ως προς σημείο, ένα είδος δηλαδή σύγχυσης που θα τολμούσαμε να το χαρακτηρίσουμε ως **διασυμμετρική** σύγχυση **συμμετρίας** .



	Cga	Cgb	Cgc	Cgd
ΠΟΣΟΣΤΟ ΕΠΙ ΕΡΩΤΗΘΕΝΤΩΝ	39,57%	21,58%	44,60%	2,88%

Τελικά, από τις απαντήσεις του παραπάνω ερωτήματος φαίνεται ότι αρκετοί μαθητές μπορούν να επιτύχουν σε έργα κατασκευής - συμπλήρωσης του τμήματος που λείπει από τη γραφική παράσταση συνάρτησης ώστε αυτή να έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, αλλά και ένα ‘ικανοποιητικό’ ποσοστό από αυτούς δίνει απαντήσεις που υποδεικνύουν ένα είδος σύγχυσης ενδοσυμμετρικής ή διασυμμετρικής συμμετρίας αλλά και σύγχυσης μεταξύ σχέσης και συνάρτησης.

<u>**Ερώτηση 5**</u>. Στην ερώτηση 5 ζητήθηκε από τους μαθητές να δώσουν τον αλγεβρικό τύπο μιας συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση να

έχει άξονα συμμετρίας (χωρίς να ζητείται συγκεκριμένη διεύθυνση για αυτόν).

Για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων χρησιμοποιήθηκε μια μεταβλητή, η Ex, με τιμές 0, 1 και 0,5. Η τιμή 1 αντιστοιχίστηκε στην περίπτωση του σωστού ενώ η τιμή 0 στην περίπτωση του λανθασμένου τύπου ή καμιάς απάντησης. Η τιμή 0,5 δόθηκε για την περίπτωση που ως τύπος δόθηκε ευθεία. Για αυτήν (αν δεν είναι κατακόρυφη), μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης με άξονες συμμετρίας τις άπειρες ευθείες που είναι κάθετες προς αυτή. Βέβαια αυτό είναι κάτι που ισχύει, αλλά προβληματιστήκαμε έντονα για το αν οι μαθητές απάντησαν συνειδητά ή η απάντησή τους μπορεί να οφείλεται σε άλλους λόγους.

Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:

Οι μαθητές που απάντησαν σωστά ήταν 42 δηλαδή ποσοστό 30,22 %, αυτοί που έδωσαν για απάντηση ευθεία ήταν 23 και αυτοί που απάντησαν λάθος ή καθόλου ήταν 74.

Από τους μαθητές που απάντησαν σωστά οι 30 (ποσοστό 71,43 %) έδωσαν για απάντηση τύπο συνάρτησης με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας (κυρίως παραβολή), ενώ οι 12 (ποσοστό 28,57 %) με πλάγιο άξονα συμμετρίας (υπερβολή). Φαίνεται ότι υπάρχει μια ‘προτίμηση’ των μαθητών προς κατακόρυφο άξονα συμμετρίας γραφικής παράστασης συνάρτησης. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι οι συναρτήσεις με άξονα συμμετρίας που διδάσκονται έχουν συνήθως κατακόρυφο άξονα συμμετρίας.

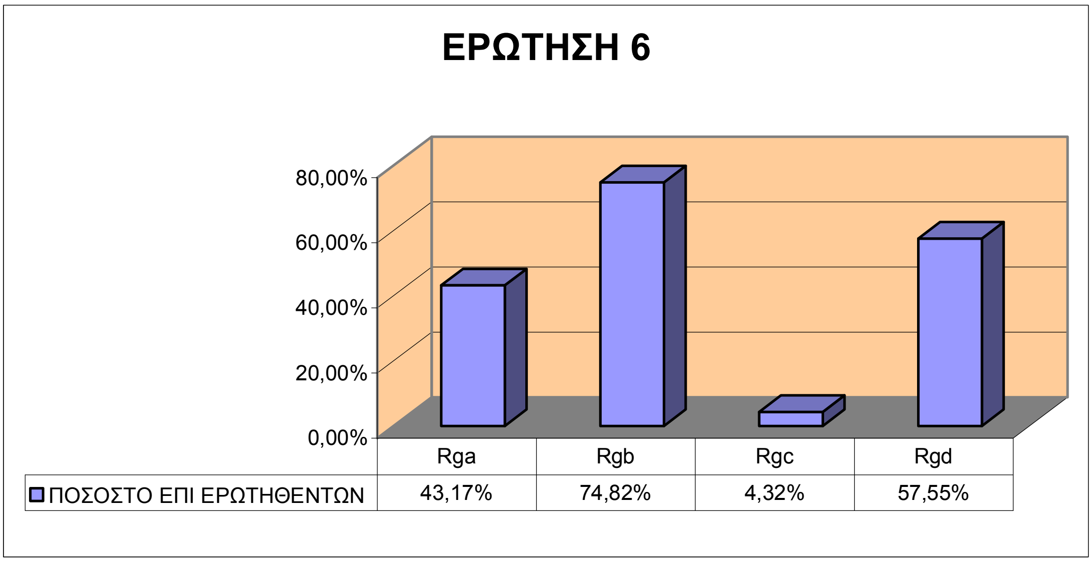
Αξίζει τέλος να αναφέρουμε ότι 15 από αυτούς που απάντησαν λανθασμένα, έδωσαν για αλγεβρικό τύπο συνάρτησης με άξονα συμμετρίας, εξίσωση κωνικής τομής (κύκλου, έλλειψης, παραβολής ή υπερβολής), δηλαδή καμπύλης που δεν αποτελεί συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ξανά το φαινόμενο ένα ποσοστό μαθητών (10,79 %) να <u>συγχέει τις έννοιες συνάρτηση-σχέση και αντίστοιχη καμπύλη.</u>

Οι διαπιστώσεις αυτές φαίνεται να επαληθεύουν τις απόψεις της A. Sierpinska, η οποία θεωρεί τη συμμετρία που υπάρχει μεταξύ των χ και y στην εξίσωση της έλλειψης ή του κύκλου ως γνωστικό εμπόδιο, αφού δεν είναι ξεκάθαροι οι ρόλοι ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής με αποτέλεσμα να μην διαχωρίζουν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης από αυτή της σχέσης. Όμως η ασάφεια αυτή εμφανίζεται στην έρευνά μας και για τις άλλες κωνικές τομές που η καμπύλη τους δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (παραβολή και υπερβολή).

Έτσι τα παραπάνω σε συνδυασμό και με ενδείξεις που απορρέουν από το προηγούμενο ερώτημα, όπως ήδη αναφέραμε, φαίνεται να δείχνουν προς την ύπαρξη μιας γενικότερης σύγχυσης μεταξύ σχέσης και συνάρτησης τόσο σε επίπεδο γραφικής παράστασης όσο και σε επίπεδο αλγεβρικής έκφρασης.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές δυσκολεύονται να δώσουν την αλγεβρική έκφραση συνάρτησης που έχει άξονα συμμετρίας, ενώ κάποιο ποσοστό από αυτούς φαίνεται να συγχέει την έννοια της σχέσης με αυτήν της συνάρτησης.

<u>Ερώτηση 6</u>. Με την ερώτηση 6 θέλαμε να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να εντοπίσουν την ύπαρξη άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή δίνεται με μορφή γραφικής παράστασης. Ήταν δηλαδή έργο αναγνώρισης της έννοιας του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε γραφική μορφή.
Έτσι, τους δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων με ζητούμενο να αναφέρουν σε ποια (ή ποιες) υπάρχει άξονας συμμετρίας (βλέπε παράρτημα- ερωτηματολόγιο).
Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν: Rga, Rgb, Rgc, Rgd με τιμές 1, 0 ανάλογα με το αν απάντησαν ή όχι αντίστοιχα στην ερώτηση α, β, γ, δ . Σωστά ήταν τα β και δ.
Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:
Οι μαθητές που θεώρησαν ότι η β έχει άξονα συμμετρίας ήταν 104 ή ποσοστό 74,82 % . Η απάντηση είναι ορθή και αντιστοιχεί σε συνάρτηση με άξονα συμμετρίας τον y΄y. Το αμέσως επόμενο ποσοστό είναι 57,55 % που αντιστοιχεί σε πλήθος 80 μαθητών οι οποίοι έδωσαν ως απάντηση το δ. Και αυτή η απάντηση είναι ορθή και αντιστοιχεί σε συνάρτηση (παραβολή) με άξονα συμμετρίας την ευθεία χ =5.
Το σχήμα γ το εξέλαβαν ως σωστό 6 μαθητές ή ποσοστό 4,32 %.
Θα χαρακτηρίζαμε ως ‘ενθαρρυντικό’ το αποτέλεσμα αυτό, αφού την ‘ολοφάνερα’ λανθασμένη αυτήν απάντηση την έδωσε αυτό το ποσοστό, που θα το χαρακτηρίζαμε ως ‘χαμηλό’.



Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι 60 μαθητές ή ένα ποσοστό 43,17 % εξέλαβε ως συνάρτηση με άξονα συμμετρίας αυτή του σχήματος α. Η απάντηση είναι προφανώς λανθασμένη αφού η συνάρτηση του σχήματος αυτού δεν έχει άξονα συμμετρίας. Έχει όμως **κέντρο συμμετρίας** το Ο. Μάλιστα με μια προσεκτικότερη ανάγνωση των αριθμών διαπιστώνουμε ότι:

α) Το πλήθος των μαθητών που απάντησαν σε ένα μόνο από τα ορθά β ή δ ήταν 70. Από αυτούς οι 39 απάντησαν και το α ως ορθό, δηλαδή ποσοστό 55,71 %. Αυτό σημαίνει ότι ποσοστό 55,71% των μαθητών που αναγνώρισαν μόνο μια συνάρτηση με άξονα συμμετρίας θεώρησε λανθασμένα ότι συνάρτηση είχε άξονα συμμετρίας (απάντηση α) ενώ είχε κέντρο συμμετρίας.

β)Από τους 127 μαθητές που έδωσαν μια τουλάχιστον σωστή απάντηση (β ή δ) οι 48 έδωσαν ως απάντηση και την λανθασμένη α. Από τους 127 δηλαδή μαθητές που αναγνώρισαν ορθά άξονα συμμετρίας σε συνάρτηση από τη γραφική της παράσταση, οι 48, ποσοστό 37,8%, θεώρησαν λανθασμένα ότι υπάρχει άξονας συμμετρίας σε συνάρτηση ενώ υπήρχε κέντρο συμμετρίας. Από την άλλη, από τους 60 μαθητές που θεώρησαν λανθασμένα ότι υπάρχει κέντρο συμμετρίας σε συνάρτηση, οι 48 θεώρησαν ορθά ότι υπάρχει άξονας συμμετρίας σε συνάρτηση, ποσοστό δηλαδή 80,% .

γ)Οι μαθητές που έδωσαν για απάντηση τα β και δ, δηλαδή τα ορθά, ήταν 57, δηλαδή ποσοστό 41,01% του συνόλου. Από αυτούς οι 9 απάντησαν και το α, δηλαδή ποσοστό 15,79%. Φαίνεται λοιπόν ότι από όσους αναγνώρισαν και τις δύο γραφικές παραστάσεις με άξονα συμμετρίας δηλαδή μπορούν και αναγνωρίζουν καλλίτερα την έννοια αυτή, μόνο το 15,79% τη συγχέει με την έννοια του κέντρου συμμετρίας.

	ΈΝΑ ΜΟΝΟ	ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ ΈΝΑ	ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ
ΠΟΣΟΣΤΟ ΛΑΝΘ. ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗΣ	55,71%	37,80%	15,79%

Στον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι από τους μαθητές που αναγνώρισαν σε μορφή γραφικής παράστασης μόνο μια από τις δύο συναρτήσεις με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας, το 55,71 % θεώρησε λανθασμένα ότι γραφική παράσταση είχε άξονα συμμετρίας ενώ είχε κέντρο συμμετρίας. Στις περιπτώσεις που υπήρχε τουλάχιστον μία ή δύο ορθές αναγνωρίσεις τα αντίστοιχα ποσοστά μειώθηκαν σε 37,80 % και 15,79 % αντίστοιχα.

Βλέπουμε δηλαδή μια έντονη συσχέτιση των δύο εννοιών με δυνατές ενδείξεις έλλειψης αποσαφήνισης της μιας σε σχέση με την άλλη. Θα μπορούσαμε δηλαδή να μιλήσουμε για σύγχυση των δύο εννοιών, και μάλιστα με βάση την ορολογία που εισάγαμε, για **διασυμμετρική** σύγχυση **συμμετρίας**.
Μάλιστα φαίνεται ξεκάθαρα ότι όσο περισσότερα είναι τα έργα αναγνώρισης του (κατακόρυφου) άξονα συμμετρίας συνάρτησης, στα οποία επιτυγχάνουν οι μαθητές, τόσο μειώνεται το ποσοστό αυτών που θεωρεί λανθασμένα ότι κάποια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας, ενώ στην πραγματικότητα αυτή έχει κέντρο συμμετρίας. Είναι σαφές δηλαδή, ότι όσο καλλίτερα έχει κατανοήσει κάποιος την έννοια του (κατακόρυφου) άξονα συμμετρίας, τόσο λιγότερο συγχέει την έννοια αυτή με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε τα διαφορετικά ποσοστά επιτυχίας σε έργα αναγνώρισης άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν μεταβάλλεται ο άξονας ή η μορφή της συνάρτησης. Το β, όπου άξονας συμμετρίας ήταν ο y΄y και η μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης δύο ημιευθείες (πρόκειται για τη συνάρτηση f(x)= -|x|+5), είχε ποσοστό επιτυχίας 74% , ενώ το δ, όπου άξονας συμμετρίας ήταν η ευθεία x=5 και η καμπύλη ήταν παραβολή, είχε ποσοστό επιτυχίας 58 % . Φαίνεται λοιπόν ότι ο βαθμός επιτυχίας έργων που αφορούν σε αναγνώριση αξονικής συμμετρίας από τη γραφική παράσταση συνάρτησης (ενδοσυμμετρικά έργα συμμετρίας) εξαρτάται από τη διεύθυνση του άξονα (κατακόρυφος, οριζόντιος ή πλάγιος και πιθανά ποιος ακριβώς είναι), και τη μορφή της συνάρτησης.

Τελικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε γενικές γραμμές οι μαθητές επιτυγχάνουν σε έργα αναγνώρισης κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε γραφική μορφή, παρά το γεγονός ότι σε ένα ‘ικανοποιητικό’ ποσοστό από αυτούς δημιουργείται σύγχυση με την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο.

Ερώτηση 7. Στην ερώτηση 7 δόθηκαν οι αλγεβρικοί τύποι τεσσάρων συναρτήσεων και οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ποιοι από αυτούς αντιστοιχούν σε συναρτήσεις με άξονα συμμετρίας τον y΄y (βλέπε παράρτημα- ερωτηματολόγιο).
Δόθηκε δηλαδή ένα έργο αναγνώρισης του y΄y ως άξονα συμμετρίας συνάρτησης η οποία δινόταν σε αλγεβρική μορφή.
Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν: Raa, Rab, Rac, Rgd με τιμές 1, 0 ανάλογα με το αν απάντησαν ή όχι αντίστοιχα στην ερώτηση α, β, γ, δ .
Σωστές απαντήσεις ήταν οι α και δ.

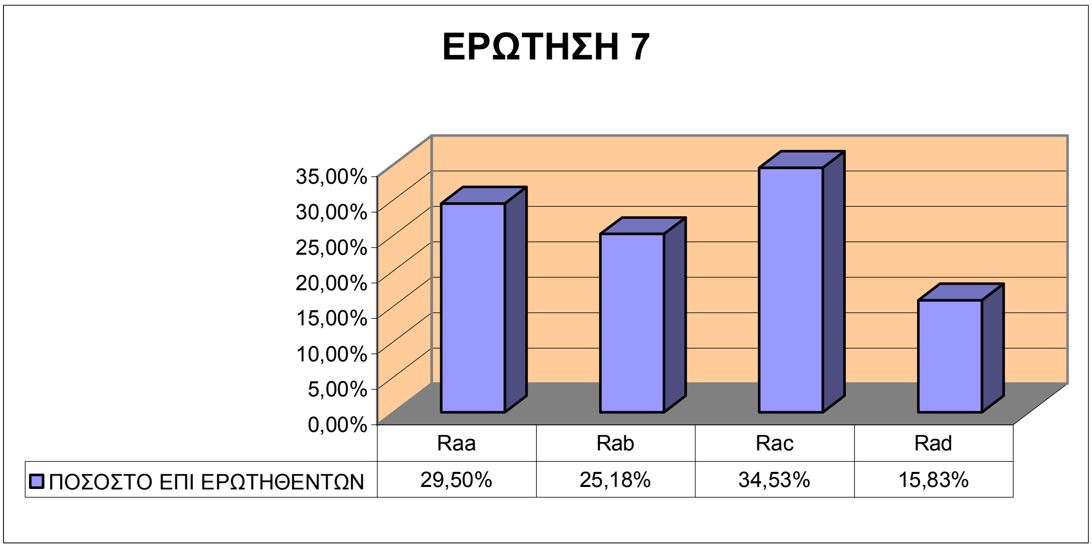
Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:

Οι μαθητές που θεώρησαν ότι η α ($y = x^2 +1$) έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y ήταν 41 ή ποσοστό 29,5 % , ενώ για τη δ ($y = 2|x|-1$) απάντησαν σωστά 22 μαθητές ή ποσοστό 15,83 %.

Παρά το γεγονός ότι και οι δύο αυτές είναι σωστές διαπιστώνουμε ότι την α την αναγνώρισαν σχεδόν διπλάσιοι μαθητές από αυτούς που αναγνώρισαν τη δ. Αυτό ίσως να οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση της απάντησης α είναι παραβολή, δηλαδή μια κατηγορία συναρτήσεων με την οποία τα παιδιά είναι εξοικειωμένα κατά τη σχολική τους διαδρομή. Επιπλέον αξιοσημείωτο γεγονός αποτελεί το ότι το ποσοστό των μαθητών που αναγνώρισαν τη δ είναι το χαμηλότερο από όλα τα ποσοστά των απαντήσεων που δόθηκαν.

Την απάντηση β τη θεώρησαν ως σωστή 35 μαθητές ή ποσοστό 25,18 % και τη γ 48 μαθητές ή ποσοστό 34,53 %.

Θα χαρακτηρίζαμε τα αποτελέσματα αυτά ως εντυπωσιακά αφού αναφέρονται σε λάθος απαντήσεις και τα ποσοστά είναι αρκετά υψηλά. Ιδιαίτερα το ποσοστό της γ είναι το υψηλότερο από τα ποσοστά όλων των απαντήσεων, ενώ της β είναι το τρίτο υψηλότερο από τα ποσοστά. Ίσως η λανθασμένη αναγνώριση από τους μαθητές να οφείλεται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά που υπάρχουν στις αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων αυτών, αφού και οι δύο αυτοί τύποι ($y = \frac{1}{x}$ και $y = x$) παρουσιάζουν μια ‘συμμετρία’ (μορφής) ως προς x και y.



Από όλες τις παραπάνω απαντήσεις, φαίνεται ότι υπάρχει δυσκολία στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y από την αλγεβρική της έκφραση, ενώ οι μαθητές σε αρκετά υψηλό ποσοστό προβαίνουν σε λανθασμένη αναγνώριση. Μάλιστα, τα ποσοστά των λανθασμένων αναγνωρίσεων είναι αθροιστικά μεγαλύτερα των ορθών (59,71 % έναντι 45,33 %).

<u>Ερώτηση 8</u>. Στην όγδοη ερώτηση δόθηκαν οι πίνακες τιμών τεσσάρων συναρτήσεων και οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ποιοι από αυτούς θα μπορούσαν να αντιστοιχούν σε συναρτήσεις με άξονα συμμετρίας (βλέπε παράρτημα- ερωτηματολόγιο).

Σκοπός μας ήταν να διερευνήσουμε αν είναι σε θέση οι μαθητές να αναγνωρίσουν πιθανό άξονα συμμετρίας για μια συνάρτηση σε μορφή πίνακα τιμών.

Έχοντας επίγνωση του γεγονότος ότι η επιτυχής αντιμετώπιση ενός τέτοιου έργου δεν ήταν εύκολη υπόθεση, δώσαμε για την κάθε συνάρτηση πίνακα με τιμές που θα μπορούσαν να διευκολύνουν τους μαθητές στην αναγνώριση που ζητούσαμε.

Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν: Rta, Rtb, Rtc, Rtd με τιμές 1, 0 ανάλογα με το αν απάντησαν ή όχι αντίστοιχα στην ερώτηση α, β, γ, δ .

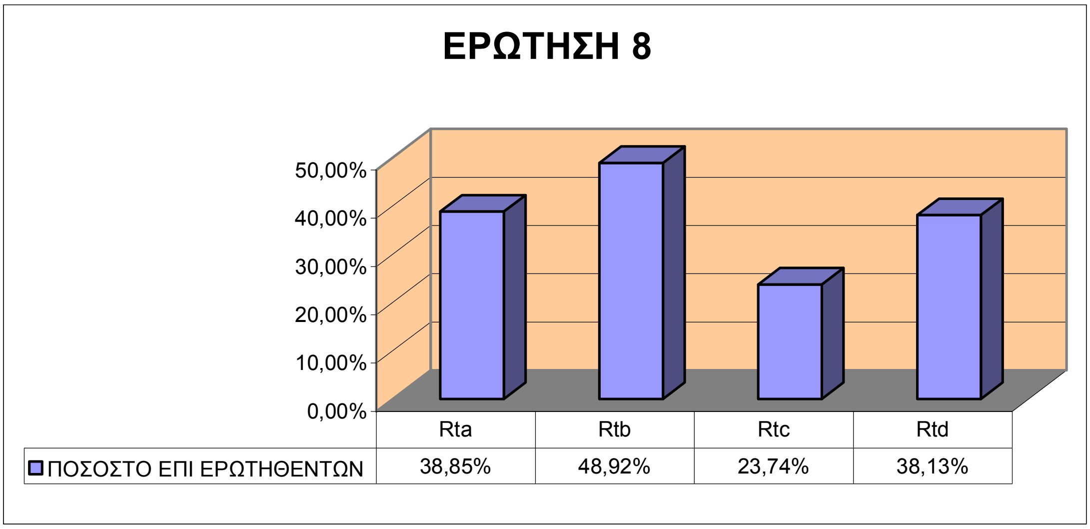
Σωστά ήταν τα β, γ και δ.

Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:

Οι μαθητές που θεώρησαν ότι η α έχει άξονα συμμετρίας ήταν 54 ή ποσοστό 38,85 %. Υπήρξαν 68 μαθητές που θεώρησαν ότι η β έχει άξονα συμμετρίας ή ποσοστό 48,92 %, 33 ή ποσοστό 23,74 % θεώρησαν ότι η γ έχει άξονα συμμετρίας, ενώ 53 μαθητές ή ποσοστό 38,13 % τάχθηκαν υπέρ της δ.

Οι περισσότερες απαντήσεις (68) αντιστοιχούσαν στη β, στην οποία είναι φανερή μια συμμετρία τιμών για το x εκατέρωθεν του μηδενός με τις αντίστοιχες τιμές του y να εμφανίζουν συμμετρία εκατέρωθεν του ένα (1) (άξονας συμμετρίας φαίνεται να είναι η ευθεία x=0 δηλαδή ο άξονας y΄y).

Οι αμέσως λιγότερες (54) απαντήσεις αντιστοιχούσαν λανθασμένα στην α, από τον πίνακα τιμών της οποίας δεν είναι φανερή κάποια συμμετρία ως προς άξονα. Κατόπιν ακολουθεί η δ (53 απαντήσεις) από τον πίνακα τιμών της οποίας είναι φανερή η ύπαρξη άξονα συμμετρίας (η ευθεία y=x) και τέλος έπεται η γ (33 απαντήσεις) με εν δυνάμει άξονα συμμετρίας την ευθεία x=1.



Από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν πιθανό άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή δίνεται σε μορφή κατάλληλου πίνακα τιμών, αλλά και το ενδεχόμενο λάθους είναι πολύ πιθανό να συμβεί σε μια τέτοια προσπάθεια, κάτι που φαίνεται από το γεγονός ότι η μοναδική λανθασμένη επιλογή που υπήρχε στις απαντήσεις του ερωτήματος ήταν η δεύτερη στη σειρά επιλογής τους.
Δεδομένου ότι η διδασκαλία για τέτοιου είδους έργα δεν διεξάγεται συχνά, ίσως χρειάζεται να δώσουμε μεγαλύτερη έμφαση σε αυτή ώστε τα πράγματα να γίνουν πιο ξεκάθαρα για τους μαθητές.

Ερώτηση 9. Η ερώτηση 9 είχε να κάνει με επίλυση προβλήματος που αναφερόταν σε άξονα συμμετρίας συνάρτησης.
Ζητήθηκε από τους μαθητές να προσδιορίσουν τους συντελεστές α, β, γ της παραβολής $y = αx^2+βx+γ$, με $α \neq 0$ αν εθεωρείτο γνωστό ότι η τετμημένη της κορυφή της ήταν ίση με ένα και ότι η παραβολή έτεμνε τον άξονα x΄x στο σημείο (3,0) και τον άξονα y΄y στο σημείο (0,-3). Αξίζει να σημειώσουμε ότι αναφερόταν ρητά στην εκφώνηση ότι η κορυφή της παραβολής βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας της (για την περίπτωση που διέφευγε αυτό από τους μαθητές).

Από την αξιοποίηση των στοιχείων που δινόντουσαν στο πρόβλημα μπορούσαν να προκύψουν άμεσα δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους.
Για τον προσδιορισμό του τρίτου αγνώστου θα μπορούσαν οι μαθητές να αξιοποιήσουν τη συμμετρία που παρουσιάζει η παραβολή ως προς την ευθεία x=1. Έτσι θα μπορούσαν να προσδιορίσουν και το σημείο (-1,0), στο οποίο η παραβολή έτεμνε τον άξονα x΄x. Αυτό θα γινόταν ακόμη πιο εύκολα αν οπτικοποιούσαν το πρόβλημα, σχεδίαζαν δηλαδή και το αντίστοιχο σχήμα.
Φυσικά το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί και με άλλο τρόπο, αξιοποιώντας για παράδειγμα τη γνώση ότι η τετμημένη της κορυφής της παραβολής ισούται με $-\frac{b}{2a}$.
Η μεταβλητή που χρησιμοποιήσαμε για τη διόρθωση και στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων ήταν η Pr με τιμές:

1, αν λύθηκε πλήρως και σωστά.

0.75, αν αξιοποιήθηκαν τα 2 σημεία τομής με τους άξονες και η συμμετρία ή η γνώση των συντεταγμένων της κορυφής της παραβολής χωρίς ολοκληρωμένη επίλυση του προβλήματος.

0.5, αν αξιοποιήθηκαν σωστά τα 2 από τα 3 παραπάνω στοιχεία.

0.25, αν αξιοποιήθηκε σωστά το 1 από τα 3 παραπάνω στοιχεία.

0, στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Αναφορικά με τις απαντήσεις που ελήφθησαν:
Οι μαθητές που αξιοποίησαν σωστά τα δεδομένα σημεία τομής της παραβολής με τους δύο άξονες χωρίς να συνεχίσουν τη λύση του προβλήματος ήταν 16, ενώ οι αντίστοιχοι που αξιοποίησαν σωστά ένα

μόνο από τα σημεία αυτά ήταν 4. Έτσι ένα ποσοστό 14,4 % αξιοποίησε τουλάχιστον ένα από τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες.
Μόνο δύο μαθητές έλυσαν σωστά (και πλήρως) το πρόβλημα (ποσοστό 1,44%) και μάλιστα μόνο ένας (ποσοστό 0,72%) αξιοποίησε τον άξονα συμμετρίας.
Παρατηρώντας την πορεία των λύσεων που προσπάθησαν να ακολουθήσουν οι μαθητές, διαπιστώσαμε ότι η αντιμετώπιση ήταν μόνο με αλγεβρικό τρόπο. Έκαναν δηλαδή απλά αντικατάσταση των συντεταγμένων των σημείων από τα οποία διέρχεται αυτή, στον τύπο της καμπύλης. Πολύ λίγοι προσπάθησαν να σχεδιάσουν το αντίστοιχο σχήμα και μάλιστα η πλειονότητά τους ανεπιτυχώς.
Πιθανά η γεωμετρική αντιμετώπιση του προβλήματος θα προσέφερε στους μαθητές τη δυνατότητα να ‘συνειδητοποιούσαν’ τη ρητά αναφερόμενη συμμετρία που παρουσιάζει η παραβολή ως προς την ευθεία x=1 και να ‘δουν’ το δεύτερο σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα x΄x.

Τελικά, από τα παραπάνω αποτελέσματα φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά να επιλύσουν πρόβλημα που σχετίζεται με τετραγωνική συνάρτηση (παραβολή) και τον άξονα συμμετρίας που έχει αυτή.
Λίγοι από αυτούς (14,4 %) κατάφεραν να αξιοποιήσουν το γεγονός ότι η παραβολή διέρχεται από τουλάχιστον ένα από κάποια δεδομένα σημεία, και μάλιστα η αντιμετώπιση ήταν αλγεβρική, ενώ την ύπαρξη του άξονα συμμετρίας της, την αξιοποίησε ένα πολύ μικρό ποσοστό (μόνο το 0,72%) .

7.4. Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΣΩ R. GRAS

7.4.1.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ.

1. Παρατηρούμε ότι οι πιο ισχυρές ομοιότητες (τα πέντε πρώτα επίπεδα ταξινόμησης) αφορούν όλες στο ερώτημα 3, δηλ. τα 5 έργα εύρεσης συμμετρικού σημείου ως προς διάφορες ευθείες.
Πιο συγκεκριμένα (βλέπε παράρτημα), τα παραπάνω επίπεδα ταξινόμησης (classification at level) με την αντίστοιχη ομοιότητα (similarity) είναι:
Classification at level : 1 : (S4 S5) similarity : 1
Classification at level : 2 : (S3 (S4 S5)) similarity : 0.999
Classification at level : 3 : (S1 S2) similarity : 0.999
Classification at level : 4 : ((S3 (S4 S5)) Pr) similarity : 0.999
Classification at level : 5 : ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)) similarity : 0.998
Ιδιαίτερα η πρώτη ομοιότητα στο επίπεδο 1, που είναι απόλυτη ομοιότητα (similarity= 1 – βλέπε παράρτημα), είναι μεταξύ των μεταβλητών S4 και S5, δηλ. εύρεση συμμετρικού ενός σημείου ως προς δύο ‘παρόμοιες’ ευθείες, την χ=1 και την y=1.

2. Όλη η ομάδα των μεταβλητών εύρεσης συμμετρικού του σημείου (S1, S2, S3, S4, S5) συνδέεται με πολύ ισχυρό τρόπο (similarity= 0.998– βλέπε παράρτημα), με την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος (Pr). (Η ομάδα ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)) (classification at level 5-ταξινόμηση στο επίπεδο 5)).
Αυτή η ισχυρή ομοιότητα είναι φυσιολογική αφού στο πρόβλημα εμπλέκεται ο άξονας συμμετρίας.

3. Η επόμενη ισχυρή ομοιότητα (classification at level 6-ταξινόμηση στο επίπεδο 6) είναι επίσης υψηλή(similarity= 0.995 – βλέπε παράρτημα). Αφορά στις μεταβλητές της ομάδας (Ex Rad) και ερμηνεύεται επίσης με έναν φυσιολογικό τρόπο. Πράγματι η μεταβλητή Ex είναι το ερώτημα 5 στο οποίο ζητείται να δοθεί ο αλγεβρικός τύπος μιας συνάρτησης, της οποίας η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας. Επίσης η μεταβλητή Rad αντιστοιχεί στο 7^{o} ερώτημα που είναι η αναγνώριση των συναρτήσεων των οποίων η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y όταν αυτές δίνονται με αλγεβρικό τύπο. Το Rad αντιστοιχεί ακριβώς στην αναγνώριση του αλγεβρικού τύπου της τέταρτης συνάρτησης που έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.
Η ομάδα (Ex Rad) είναι μια πρώτη ένδειξη επίδρασης του τρόπου αναπαράστασης μιας συνάρτησης που έχει ως άξονα συμμετρίας τον y΄y εφόσον και οι δύο αναπαραστάσεις (Ex, Rad) είναι εκφρασμένες αλγεβρικά.

4. Η επόμενη ομοιότητα (classification at level 7-ταξινόμηση στο επίπεδο 7) αφορά τις δύο μεταβλητές της ομάδας (D2 Dd) που συνδέονται με τον ορισμό. Πράγματι η D2 είναι ο αόριστος ορισμός που δίνουν οι μαθητές στο ερώτημα 1, όπου τους ζητείται να δώσουν τον ορισμό πότε μια ευθεία *ε* λέγεται άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. Η Dd αντιστοιχεί στην τέταρτη επιλογή του ερωτήματος 2. Το ερώτημα αυτό το έχουμε ονομάσει 'ορισμός στην πράξη', δηλ. ο στόχος της είναι να διαπιστώσουμε ποιοι μαθητές αντιλαμβάνονται πραγματικά αν ο άξονας y΄y αποτελεί άξονα συμμετρίας μιας συνάρτησης. Η μεταβλητή Dd αντιστοιχεί στην $4^{η}$ επιλογή του ερωτήματος που είναι λανθασμένη.

Ακριβώς το γεγονός ότι η ομοιότητα μεταξύ D2 και Dd είναι επίσης πολύ υψηλή (similarity= 0.987 – βλέπε παράρτημα) έχει θεωρητικές βάσεις, αφού σημαίνει ότι οι μαθητές που δίνουν αόριστο ορισμό (D2) επιλέγουν λανθασμένη έκφραση (Dd) στο ερώτημα 2, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί και αυτή ως αόριστη αφού το Dd σημαίνει ότι 'για κάθε τιμή του x ισχύει f(x)= -f(x)', που είναι βέβαια λάθος αλλά επιφανειακά μοιάζει με το σωστό 'για κάθε τιμή του x ισχύει f(x)= f(-x)'.

5. <u>Η συνέπεια των απαντήσεων των μαθητών</u>. Οι ομάδες (Ex, Rad) και (D2, Dd) αποτελούν μια ισχυρή ένδειξη της συνέπειας στις απαντήσεις των μαθητών ή αλλιώς της αξιοπιστίας των απαντήσεών τους.

6. Αντίθετα η (Db Rtc), που αποτελεί την επόμενη ομάδα ομοιότητας (classification at level 8-ταξινόμηση στο επίπεδο 8), δεν εκφράζει την προηγούμενη συνέπεια στις απαντήσεις τους εφόσον η μεταβλητή Db, η οποία εκφράζει αλγεβρικά την κατανόησης του ορισμού του άξονα συμμετρίας συνάρτησης f, στην ειδική περίπτωση που αυτός είναι ο y΄y, είναι λανθασμένη ενώ η Rtc εκφράζει ορθή αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας με μορφή πίνακα.

Επειδή η ομοιότητα είναι πολύ υψηλή (similarity= 0.9827 – βλέπε παράρτημα), αυτό πιθανό να σημαίνει ότι η μορφή της συνάρτησης σε πίνακα να μην απαιτεί γνώση ενός ορισμού για την αναγνώριση υπάρχουσας συμμετρίας ως προς άξονα. Πράγματι οι τιμές του y : 2, 1, 0, 1, 2 είναι φανερό ότι υποδεικνύουν κάποια συμμετρία.

7. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr))), (classification at level 9-ταξινόμηση στο επίπεδο 9) είναι η ισχυρή εννοιολογική ομάδα του ιεραρχικού διαγράμματος ομοιότητας.

Πράγματι η ομάδα αυτή περιλαμβάνει την επίλυση ασκήσεων εύρεσης συμμετρικών S1, S2, S3, S4 , S5, την επίλυση προβλήματος Pr καθώς και την (ορθή) αλγεβρική έκφραση του ορισμού του άξονα συμμετρίας συνάρτησης f, στην ειδική περίπτωση που αυτός είναι ο y΄y και η f ορίζεται στο **R** .

8. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας (classification at level 10-ταξινόμηση στο επίπεδο 10) είναι η ομάδα (Da, Cgc) που συνδέει μια λανθασμένη επιλογή ορισμού (Da) με τη σωστή κατασκευή ή αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή (Cgc).
Η παρατήρηση είναι ανάλογη με την παρατήρηση 6, ότι δηλ. λόγω της πολύ υψηλής ομοιότητας (similarity= 0.979 – βλέπε παράρτημα) αυτό είναι πιθανό να σημαίνει ότι η μορφή της συνάρτησης σε γραφική μορφή να μην απαιτεί γνώση ενός ορισμού για την αναγνώριση υπάρχουσας συμμετρίας ως προς άξονα.

9. Η (Rgc, Rac) είναι η επόμενη ομάδα ομοιότητας (classification at level 11-ταξινόμηση στο επίπεδο 11), όπου αυτή είναι πολύ υψηλή (similarity= 0.979 – βλέπε παράρτημα), και συνδέει μια λανθασμένη επιλογή αναγνώρισης συνάρτησης με (οποιονδήποτε) άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή (Rgc) με λανθασμένη επιλογή αναγνώρισης συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y σε αλγεβρική μορφή (Rac).
Η υψηλή ομοιότητα που υπάρχει μεταξύ αυτών των δύο μεταβλητών θα μπορούσε να μας οδηγήσει στην ερμηνεία ότι μαθητές που δεν αντιλαμβάνονται την ύπαρξη άξονα συμμετρίας συνάρτησης σε γραφική μορφή δεν μπορούν να αντιληφθούν και την αλγεβρική μορφή μιας τέτοιας συνάρτησης, στην περίπτωση που τον ρόλο του άξονα παίζει ο y΄y.

10. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας (Raa Rtb), (classification at level 12-ταξινόμηση στο επίπεδο 12) αφορά δύο μεταβλητές που συνδέονται με ισχυρή ομοιότητα (similarity= 0.961 – βλέπε παράρτημα).
Η ομοιότητα αυτή θα μπορούσε να ερμηνευθεί με ένα φυσιολογικό τρόπο αφού η μια μεταβλητή είναι η Raa, που αναφέρεται στην (ορθή) αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y, όταν αυτή δίνεται σε αλγεβρική μορφή, ενώ η άλλη, η Rtb, αναφέρεται στην (ορθή) αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας όταν αυτή δίνεται σε μορφή πίνακα. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο άξονας συμμετρίας της συνάρτησης που δίνεται σε μορφή πίνακα είναι κατακόρυφη ευθεία και μάλιστα ο άξονας y΄y.

11. Η ομάδα που ακολουθεί ((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))), (classification at level 13-ταξινόμηση στο επίπεδο 13) είναι μια ομάδα του ιεραρχικού διαγράμματος ομοιότητας με ισχυρή ομοιότητα (similarity= 0.954 – βλέπε παράρτημα). Αυτή συνδέει από τη μια το ζευγάρι των μεταβλητών D2 και Dd, που ουσιαστικά σημαίνουν ασάφεια γνώσης του ορισμού αλλά και της αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτό, και από την άλλη την ισχυρή εννοιολογική ομάδα, η οποία περιλαμβάνει την επίλυση ασκήσεων εύρεσης συμμετρικών S1, S2, S3, S4 , S5 καθώς και την επίλυση προβλήματος Pr.

Η φαινομενική ασυνέπεια των απαντήσεων των μαθητών, που προκύπτει από την ομάδα αυτή, θα μπορούσε πιθανά να σημαίνει ότι το έργο της εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες που σχετίζεται μάλιστα με ισχυρή ομοιότητα με επίλυση σχετικού προβλήματος, δεν απαιτεί την γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.

12. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας (Cgd (Rgc Rac)), (classification at level 14-ταξινόμηση στο επίπεδο 14) φανερώνει με ισχυρό τρόπο (similarity= 0.954 – βλέπε παράρτημα) τη σύνδεση μεταξύ της αδυναμίας κατασκευής ή αναγνώρισης συνάρτησης με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή (Cgd) από τη μια, και από την άλλη, την αδυναμία αντίληψης της ύπαρξης άξονα συμμετρίας συνάρτησης σε γραφική μορφή (Rgc), καθώς και της αλγεβρικής μορφής μιας τέτοιας συνάρτησης, στην περίπτωση που τον ρόλο του άξονα παίζει ο y΄y (Rac). Η ομάδα αυτή δείχνει έντονα τη συνέπεια των απαντήσεων των μαθητών, αλλά και τη δυνατή συσχέτιση που υπάρχει ανάμεσα στην γραφική και την αλγεβρική αναπαράσταση συνάρτησης σε έργα αναγνώρισης άξονα συμμετρίας της συνάρτησης αυτής.

13. Η ((Db Rtc) Rab) είναι η ομάδα που ακολουθεί (classification at level 15-ταξινόμηση στο επίπεδο 15). Ουσιαστικά υπάρχει μια ισχυρή ομοιότητα (similarity= 0.952 – βλέπε παράρτημα) μεταξύ της ορθής αναγνώρισης κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης με μορφή πίνακα και της πιθανά μη προαπαιτούμενης γνώσης ενός ορισμού για την αναγνώριση υπάρχουσας συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y, από τη μια (βλέπε ομάδα (Db Rtc)), και της λανθασμένης αναγνώρισης υπάρχουσας συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y (Rab) όταν η συνάρτηση δίνεται με μορφή αλγεβρικού τύπου, από την άλλη. Αξίζει να αναφέρουμε ότι ο άξονας συμμετρίας στον οποίο αναφέρεται η μεταβλητή Rab είναι πλάγιος (η ευθεία y= χ).
Αυτή λοιπόν η φαινομενική (ασυνέπεια) ασυμφωνία ανάμεσα στην ορθή αναγνώριση κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης από πίνακα τιμών και τη λανθασμένη αναγνώριση του άξονα y΄y ως άξονα συμμετρίας από τον αλγεβρικό τύπο θα μπορούσε να εξηγηθεί από την ύπαρξη κάποιας σύγχυσης μεταξύ της έννοιας του άξονα συμμετρίας γενικά και της ειδικής μορφής του, τον κατακόρυφο άξονα και μάλιστα τον y΄y.
Ο παράγοντας που θα αποσαφήνιζε την έννοια αυτή ίσως είναι η εφαρμοσμένη επιλογή του ορθού ορισμού που δεν δόθηκε.

14. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας : (D3 Rga), (classification at level 16-ταξινόμηση στο επίπεδο 16) φανερώνει με ισχυρό τρόπο (similarity= 0.947 – βλέπε παράρτημα) κάτι ‘φυσιολογικό’, τη σύνδεση δηλ. μεταξύ

της έλλειψης κατανόησης ή ακόμη και της πλήρους άγνοιας του ορισμού του άξονα συμμετρίας συνάρτησης και της αδυναμίας αναγνώρισης του άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή αναπαριστάνεται γραφικά. Πράγματι η μεταβλητή D3 δηλώνει τον λανθασμένο ή κανέναν ορισμό του ερωτήματος 1 ενώ η Rga είναι μεταβλητή του ερωτήματος 6, η οποία φανερώνει την λανθασμένη αναγνώριση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή εμφανίζεται με γραφική μορφή. Βέβαια η συγκεκριμένη συνάρτηση (ερώτηση 6 επιλογή α) εμφανίζει κέντρο συμμετρίας γεγονός που μας οδηγεί στην εικασία ότι η άγνοια του ορισμού στην περίπτωση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης θα μπορούσε να οδηγήσει αναφορικά με τη γραφική παράσταση σε σύγχυση με μια άλλη έννοια, την έννοια του κέντρου συμμετρίας.

15. Η ομάδα (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad)) που ακολουθεί (classification at level 17-ταξινόμηση στο επίπεδο 17) είναι μια ομάδα του ιεραρχικού διαγράμματος ομοιότητας με ισχυρή ομοιότητα (similarity= 0.9318 – βλέπε παράρτημα). Αυτή συνδέει από τη μια τις μεταβλητές της ταξινόμησης του επιπέδου 13 δηλαδή την ομάδα (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) με την ομάδα των μεταβλητών (Ex Rad).
Η ομάδα (Ex Rad) αποτελεί ένδειξη επίδρασης του τρόπου αναπαράστασης μιας συνάρτησης που έχει ως άξονα συμμετρίας τον y΄y εφόσον και οι δύο αναπαραστάσεις (Ex, Rad) είναι εκφρασμένες αλγεβρικά. Η ομάδα των μεταβλητών της ταξινόμησης του επιπέδου 13
θα μπορούσε πιθανά να σημαίνει ότι το έργο της εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες και η σχετιζόμενη με ισχυρή ομοιότητα με αυτήν επίλυση σχετικού προβλήματος, δεν απαιτεί την γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν. Φαίνεται λοιπόν ότι ο αλγεβρικός τρόπος
αναπαράστασης μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y συνδέεται με ισχυρή ομοιότητα με το έργο της εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες και με την επίλυση σχετικού προβλήματος, χωρίς να απαιτείται η γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.

16. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας ((Da Cgc) Rtd) (classification at level 18-ταξινόμηση στο επίπεδο 18) φανερώνει την ομοιότητα με ισχυρό τρόπο (similarity= 0.9248 – βλέπε παράρτημα) μεταξύ της ομάδας (Da, Cgc), που συνδέει μια λανθασμένη επιλογή ορισμού (Da) με τη σωστή κατασκευή ή αναγνώριση συνάρτησης με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή (Cgc), και της μεταβλητής Rtd, η οποία δηλώνει σωστή αναγνώριση συνάρτησης με πλάγιο άξονα συμμετρίας (y=χ και y=-χ) όταν δίνεται σε μορφή πίνακα.
Η παραπάνω ομοιότητα είναι πιθανό να σημαίνει ότι η αναπαράσταση της συνάρτησης σε γραφική μορφή ή σε μορφή πίνακα δεν απαιτεί γνώση

ενός ορισμού για την αναγνώριση υπάρχουσας συμμετρίας ως προς οποιουδήποτε είδους άξονα.

17. Η ομάδα ομοιότητας που ακολουθεί (Cga (Cgd (Rgc Rac))), (classification at level 19-ταξινόμηση στο επίπεδο 19) φανερώνει την ομοιότητα (similarity= 0.847 – βλέπε παράρτημα) μεταξύ μιας λανθασμένης αναγνώρισης-κατασκευής του μέρους που λείπει από τη γραφική παράσταση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y (Cga) με μια ομάδα ομοίως λανθασμένων επιλογών, δηλαδή την επίσης λανθασμένη αναγνώριση-κατασκευή του τμήματος που λείπει από τη γραφική παράσταση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y (Cgd), από τη μια, και από την άλλη, την ομάδα (Rgc Rac) η οποία φανερώνει την αδυναμία αντίληψης της ύπαρξης άξονα συμμετρίας συνάρτησης σε γραφική μορφή (Rgc), καθώς και της αλγεβρικής μορφής μιας τέτοιας συνάρτησης, στην περίπτωση που τον ρόλο του άξονα παίζει ο y΄y (Rac). Η ομάδα (Cga (Cgd (Rgc Rac))) δείχνει συνέπεια μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών, αλλά και την ομοιότητα (συσχέτιση) που υπάρχει σε έργα αναγνώρισης άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή αναπαρασταθεί με γραφική ή αλγεβρική μορφή.

18. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας είναι η ((D3 Rga) Cgb), (classification at level 20-ταξινόμηση στο επίπεδο 20), η οποία φανερώνει την ομοιότητα (similarity= 0.846 – βλέπε παράρτημα) ανάμεσα στην ομάδα (D3 Rga) και τη μεταβλητή Cgb. Έχουμε δηλαδή μια ομάδα που από τη μια φανερώνει τη ‘φυσιολογική’ σύνδεση μεταξύ της έλλειψης κατανόησης ή ακόμη και της πλήρους άγνοιας του ορισμού του άξονα συμμετρίας συνάρτησης και της αδυναμίας αναγνώρισης του άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή αναπαριστάνεται γραφικά(D3 Rga), και από την άλλη, της λανθασμένης αναγνώρισης-κατασκευής του τμήματος που λείπει από τη γραφική παράσταση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Θα την χαρακτηρίζαμε ως μια ομάδα που εκφράζει μια συνέπεια, αφού η έλλειψη κατανόησης ή ακόμη και η πλήρης άγνοια του ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας είναι λογικό να σημαίνει και την αδυναμία επιτυχίας έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση ή και την κατασκευή αναπαραστάσεων της έννοιας αυτής.

19. Η (D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))) είναι η ομάδα ομοιότητας που ακολουθεί, (classification at level 21-ταξινόμηση στο επίπεδο 21), με ομοιότητα (similarity= 0.766 – βλέπε παράρτημα).

Η ομάδα αυτή συσχετίζει με όρους ομοιότητας τον ορθό ορισμό του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, από τη μια, με την (επιτυχή) εύρεση των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες και τη σχετιζόμενη με ισχυρή ομοιότητα με αυτήν επίλυση σχετικού προβλήματος, αλλά και με τον αλγεβρικό τρόπο αναπαράστασης μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y, από την άλλη, χωρίς την προϋπόθεση γνώσης του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.

Η ερμηνεία που θα μπορούσαμε να δώσουμε στα φαινομενικά αντιφατικά συμπεράσματα που αναφέραμε είναι ότι, τελικά η επιτυχία εκτέλεσης έργων εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες, της επίλυσης σχετικού προβλήματος αλλά και έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση μιας συνάρτησης σε αλγεβρική μορφή με άξονα συμμετρίας τον y΄y, δεν σχετίζονται με γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.

20. Ακολουθεί η ομάδα ομοιότητας (((Da Cgc) Rtd) Rgb), (classification at level 22-ταξινόμηση στο επίπεδο 22), με ομοιότητα= 0.722 (similarity= 0.722 – βλέπε παράρτημα).
Η ομάδα αυτή συσχετίζει με όρους ομοιότητας τη λανθασμένη επιλογή (Da) της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, στην ειδική περίπτωση που αυτός είναι ο y΄y, με επιτυχή έργα κατασκευής (Cgc) ή και αναγνώρισης συνάρτησης σε γραφική μορφή (Rgb) με άξονα συμμετρίας τον άξονα αυτόν, αλλά και με επιτυχή έργα αναγνώρισης συνάρτησης σε μορφή πίνακα (Rtd) με πλάγιο άξονα συμμετρίας.
Θεωρούμε ότι η παραπάνω ομοιότητα πιθανά να σημαίνει ότι η αναπαράσταση της συνάρτησης σε γραφική μορφή ή σε μορφή πίνακα δεν απαιτεί γνώση ενός ορισμού για την επιτυχία έργων (κατασκευή-αναγνώριση) που συνδέονται με υπάρχουσα συμμετρία της συνάρτησης ως προς άξονα οποιουδήποτε είδους.

21. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας είναι η (((D3 Rga) Cgb) Rta), (classification at level 23-ταξινόμηση στο επίπεδο 23), με ομοιότητα= 0.585 (similarity=0.585 – βλέπε παράρτημα).
Στην ομάδα αυτή συσχετίζονται η έλλειψη γνώσης του ορισμού του άξονα συμμετρίας συνάρτησης (D3), με την εσφαλμένη αναγνώριση-κατασκευή του τμήματος που λείπει από τη γραφική παράσταση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y (Cgb) και τις λανθασμένες επιλογές αναγνώρισης του άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή αναπαριστάνεται γραφικά (Rga) ή με μορφή πίνακα (Rta).
Η ομάδα αυτή εκφράζει μια ‘φυσιολογική’ κατάσταση, αφού η έλλειψη κατανόησης ή ακόμη και η πλήρης άγνοια του ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας είναι λογικό να σημαίνει και την αδυναμία επιτυχίας έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση ή και την κατασκευή αναπαραστάσεων σε διαφορετικά ποιοτικά συστήματα αναπαράστασης της έννοιας αυτής.

22. Στην ταξινόμηση στο επίπεδο 24 (classification at level 24) βρίσκεται η ομάδα ομοιότητας (((Db Rtc) Rab) Rgd), με ομοιότητα= 0.554 (similarity=0.554 – βλέπε παράρτημα).
Στα πλαίσια της ομάδας αυτής συνδέονται η ορθή αναγνώριση κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης με μορφή πίνακα (Rtc) και γραφικής παράστασης (Rgd), από τη μια, με τη λανθασμένη επιλογή (Db) της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, στην ειδική περίπτωση που αυτός είναι ο y΄y (Db) και της εσφαλμένης αναγνώρισης υπάρχουσας συμμετρίας ως προς τον άξονα y΄y (Rab) όταν η συνάρτηση δίνεται με μορφή αλγεβρικού τύπου, από την άλλη.
Αυτή λοιπόν η φαινομενική ασυμφωνία ανάμεσα στην ορθή αναγνώριση κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης από πίνακα τιμών και από γραφική παράσταση, και τη λανθασμένη αναγνώριση του άξονα y΄y ως άξονα συμμετρίας από τον αλγεβρικό τύπο θα μπορούσε να εξηγηθεί από την ύπαρξη κάποιας σύγχυσης μεταξύ της έννοιας του άξονα συμμετρίας γενικά και της ειδικής μορφής του, τον κατακόρυφο άξονα και μάλιστα τον y΄y.
Εδώ, θα έπρεπε ίσως να επαναλάβουμε ότι ο ‘κρίκος’ που λείπει για τη συνέπεια αυτής της εννοιολογικής ‘αλυσίδας’ είναι η ορθή επιλογή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό του άξονα συμμετρίας συνάρτησης.

23. Η επόμενη ομάδα ομοιότητας είναι η
((D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))) (Raa Rtb)), (classification at level 25-ταξινόμηση στο επίπεδο 25), με ομοιότητα= 0.522 (similarity=0.522 – βλέπε παράρτημα).
Αποτελείται από δύο ομάδες, την ομάδα ομοιότητας (Raa Rtb)) και την
(D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))).
Θεωρούμε ότι η ομοιότητα της ‘μεγάλης’ αυτής ομάδας μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: η επιτυχής εκτέλεση έργων εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες, της επίλυσης σχετικού προβλήματος αλλά και έργων που σχετίζονται με τον αλγεβρικό τρόπο αναπαράστασης αλλά και με μορφή πίνακα τιμών μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y, δεν σχετίζονται με γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.
Τελικά, για την εύρεση του συμμετρικού ενός σημείου ως προς διάφορους άξονες, για έργα που σχετίζονται με την αναγνώριση μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y και αναπαρίσταται σε αλγεβρική μορφή αλλά και με μορφή πίνακα τιμών, όπως και για την επίλυση προβλήματος που αναφέρεται σε άξονα συμμετρίας, δεν έχει σημασία αν κάποιος γνωρίζει ή όχι τον τυπικό λεκτικό ορισμό του άξονα

συμμετρίας συνάρτησης ή την αλγεβρική σχέση που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτό για άξονα συμμετρίας τον y΄y.

24. Στην ταξινόμηση στο επίπεδο 26 (classification at level 26) βρίσκεται η ομάδα ομοιότητας ((D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))) (Raa Rtb)) (((Da Cgc) Rtd) Rgb)).
Από την ομοιότητα που υπάρχει στην ομάδα αυτή, η οποία είναι χαμηλή (similarity : 0.382– βλέπε παράρτημα), φαίνεται ότι για έργα που σχετίζονται με:

- την εύρεση του συμμετρικού ενός σημείου ως προς διάφορους άξονες,
- την αναπαράσταση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y με αλγεβρικό τρόπο αλλά και με μορφή πίνακα τιμών,
- για την επίλυση προβλήματος που αναφέρεται σε άξονα συμμετρίας,
- κατασκευή ή και αναγνώριση συνάρτησης σε γραφική μορφή με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y,

είναι αδιάφορο αν κάποιος γνωρίζει ή όχι τον τυπικό λεκτικό ορισμό του άξονα συμμετρίας συνάρτησης ή την αλγεβρική σχέση που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτό για άξονα συμμετρίας τον y΄y.

25. Η τελευταία ομάδα ομοιότητας είναι η ((((D3 Rga) Cgb) Rta) (((Db Rtc) Rab) Rgd)), του επίπεδου ταξινόμησης 27(classification at level 27) με ομοιότητα 0.107 (similarity : 0.107– βλέπε παράρτημα).
Στην ομάδα αυτή συσχετίζονται με όρους χαμηλής ομοιότητας οι ομάδες (((D3 Rga) Cgb) Rta) και (((Db Rtc) Rab) Rgd)).
Έχουμε δηλαδή, από τη μια, τη συσχέτιση μιας ‘φυσιολογικής’ κατάστασης, όπου η άγνοια του ορισμού μιας μαθηματικής έννοιας σημαίνει και την αδυναμία επιτυχίας έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση ή και την κατασκευή αναπαραστάσεων σε διαφορετικά ποιοτικά συστήματα αναπαράστασης της έννοιας αυτής, και από την άλλη την επιτυχία έργων που σχετίζονται με κάποιες αναπαραστάσεις της έννοιας αυτής, αλλά και την αποτυχία κάποιων άλλων, με άγνοια ή λανθασμένη επιλογή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό της υπό συζήτηση μαθηματικής έννοιας.
Ορθώνεται έτσι ο προβληματισμός μήπως η κατανόηση του σχετικού ορισμού, με την επακόλουθη αλγεβρική σχέση που απορρέει, θα μπορούσε να έχει ως αποτέλεσμα την επιτυχία των έργων που σχετίζονται με τις αναπαραστάσεις της έννοιας αυτής.

7.4.1.2. ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ ΕΡΓΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ.

1. Από το διάγραμμα ομοιότητας και τις προηγούμενες παρατηρήσεις φαίνεται ότι προκύπτουν τρεις ομάδες έργων.
Ομάδα 1: Η ομάδα που αντιστοιχεί στην ταξινόμηση στο επίπεδο 26.
Ομάδα 2: Η ομάδα που αντιστοιχεί στην ταξινόμηση στο επίπεδο 27.
Ομάδα 3: Η ομάδα που αντιστοιχεί στην ταξινόμηση στο επίπεδο 19.

2. Ουσιαστικά όμως οι ομάδες είναι πέντε και έτσι θα αναλυθούν. Είναι πέντε διότι η ομάδα 1(ταξινόμηση στο επίπεδο 26– βλέπε παράρτημα) έχει χαμηλή ομοιότητα (0,382) ενώ η ομάδα 2 ουσιαστικά δεν έχει ομοιότητα (0,107).
Οι ομάδες λοιπόν τελικά είναι οι παρακάτω:
1. Ομάδα 1: (D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))), (classification at level 21-ταξινόμηση στο επίπεδο 21).
Στην ομάδα αυτή περιλαμβάνεται η ισχυρή ομάδα συμμετρικών σημείου ως προς άξονες και επίλυσης προβλήματος (classification at level 5-ταξινόμηση στο επίπεδο 5), με ομοιότητα= 0.998 (similarity= 0.998– βλέπε παράρτημα).
Αυτή η ισχυρή ομάδα συνδέεται με την ομάδα των ασαφών ορισμών (D2 Dd) (classification at level 17-ταξινόμηση στο επίπεδο 17) με ομοιότητα= 0.932 και τελικά όλη αυτή η ομάδα ορισμών, εύρεσης συμμετρικών και επίλυσης προβλήματος ενώνεται με την ομάδα (Ex Rad) (classification at level 6-ταξινόμηση στο επίπεδο 6) με ομοιότητα = 0.995. Τέλος όλη αυτή η ομάδα με την ορθή διατύπωση ορισμού D1 (classification at level 21-ταξινόμηση στο επίπεδο 21), με ομοιότητα = 0.766.
Η ομάδα αυτή ονομάζεται εννοιολογική, διότι εμπλέκονται οι δυο σωστοί ορισμοί (Dc- επιλογή) και η ορθή διατύπωση του ορισμού D1 με τη σωστή εύρεση συμμετρικών ως προς ευθείες (S1, S2, S3, S4, S5) και την επίλυση προβλήματος (Pr) . Αυτή η ομάδα συνδέεται επίσης με το ορθό παράδειγμα σε συμβολική μορφή (Ex) και την ορθή επιλογή συμβολικής έκφρασης συνάρτησης με άξονα συμμετρίας (Rad). Τέλος όλη η προηγούμενη ομάδα συνδέεται με την ομάδα (Raa Rtb) δηλαδή με την ορθή αναγνώριση συμβολικής έκφρασης συνάρτησης και σε μορφή πίνακα με άξονα συμμετρίας.

2. Σε αντιπαράθεση με την ομάδα 1 βρίσκεται η ομάδα 5
(Cga (Cgd (Rgc Rac))), (classification at level 19-ταξινόμηση στο επίπεδο 19) με ομοιότητα = 0.847, που έχει να κάνει με λάθος αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή Rgc και σε αλγεβρική έκφραση Rac καθώς και με τις λανθασμένες επιλογές – επιλογής – κατασκευής τμήματος γραφικής παράστασης ώστε να

δημιουργηθεί η γραφική παράσταση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y.

3. Η <u>ομάδα 3</u> (((D3 Rga) Cgb) Rta), (classification at level 23-ταξινόμηση στο επίπεδο 23), με ομοιότητα= 0.585, είναι επίσης λανθασμένων επιλογών σε γραφική μορφή ή μορφή πίνακα (Rga, Cgb, Rta) με τη διατύπωση λανθασμένου ορισμού D3.

4. Οι ομάδες 2 και 4 εκφράζουν μια ανάμικτη κατάσταση, εφόσον μια λανθασμένη επιλογή ορισμού (Da ή Db) συνδέονται με ορθές ή ορθές και λανθασμένες επιλογές.
Πιο συγκεκριμένα:
<u>Ομάδα 2:</u> (((Da Cgc) Rtd) Rgb), (classification at level 22-ταξινόμηση στο επίπεδο 22), με ομοιότητα= 0.722.
Στην ομάδα αυτή ο λανθασμένος ορισμός Da συνδέεται με τις σωστές επιλογές Cgc, Rtd, Rgb. Αυτό είναι μια πρώτη ένδειξη ότι για επιλογή συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή ή μορφή πίνακα δεν απαιτείται η ορθή επιλογή ορισμού συνάρτησης με άξονα συμμετρίας. Η ορθή επιλογή αυτών των τελευταίων μπορεί να βασίζεται στα επιφανειακά χαρακτηριστικά μια γραφικής παράστασης ή διάταξης αριθμών σε πίνακα και όχι σε βαθιά εννοιολογική γνώση.
Τέλος η <u>ομάδα 4</u> (((Db Rtc) Rab) Rgd), με ομοιότητα= 0.554
(classification at level 24) συνδέει μια άλλη λανθασμένη επιλογή ορισμού Db με την ορθή Rtc τη λανθασμένη Rab και την ορθή Rgd.
Το φαινόμενο που παρατηρείται εδώ είναι ακριβώς το ίδιο με το προηγούμενο, της ομάδας 2 δηλαδή, που σημαίνει ότι ένας λανθασμένος ορισμός συνδέεται με ορθή αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας σε γραφική αναπαράσταση ή μορφή πίνακα. Αντίθετα συνδέεται με λάθος αναγνώριση σε συμβολική μορφή. Η τελευταία παρατήρηση δείχνει πάλι τη συνέπεια της συμβολικής έκφρασης (Db-συμβολική-λάθος, Rab- συμβολική-λάθος), ακριβώς όπως η ομάδα (Ex Rad) (classification at level 6-ταξινόμηση στο επίπεδο 6) έδειχνε τη συνέπεια της συμβολικής έκφρασης σε ορθό παράδειγμα με ορθή αναγνώριση.

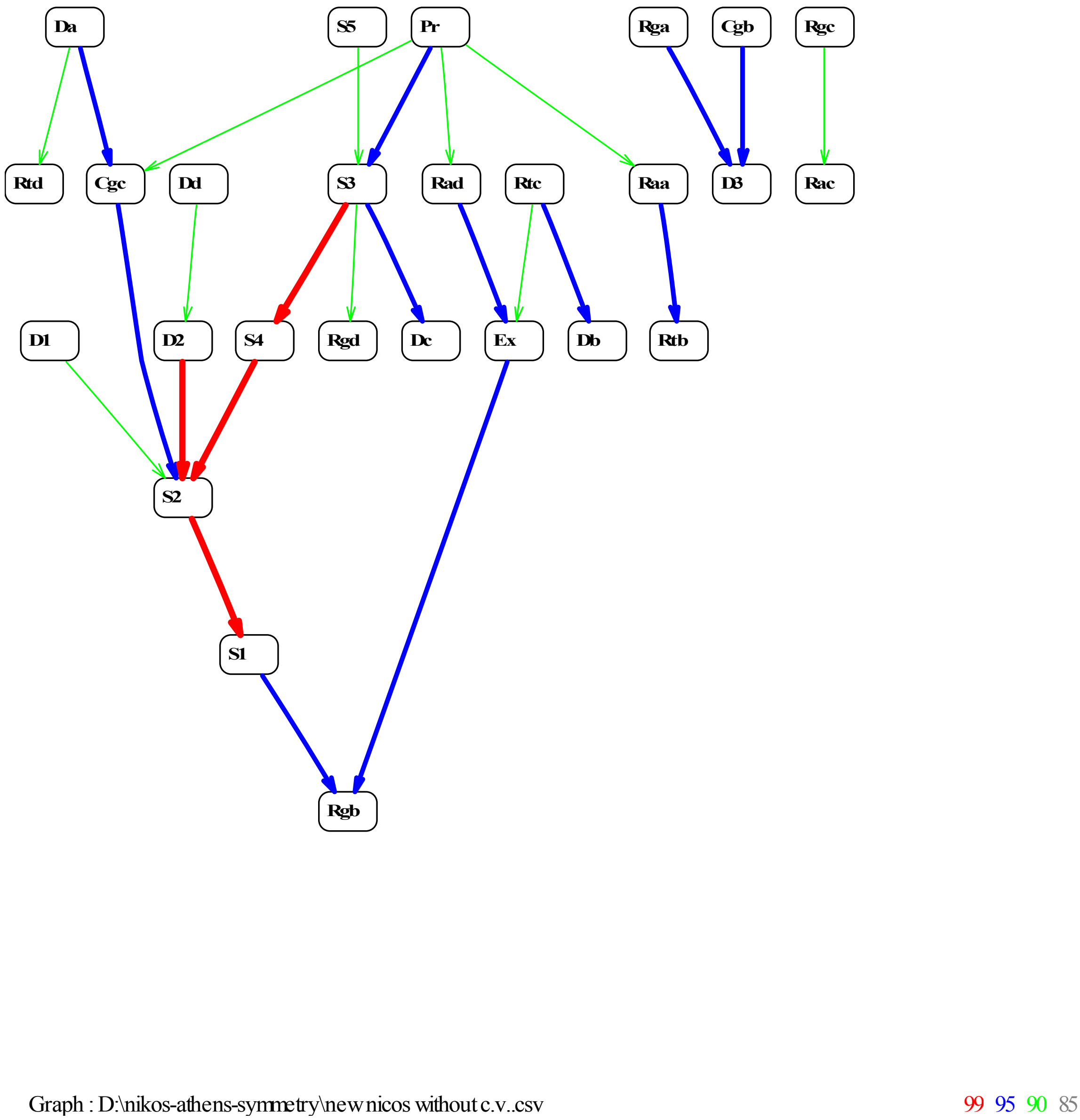
7.4.1.3. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1. Άτομα που δίνουν ορθό (ή ασαφή) λεκτικό ορισμό συνάρτησης με άξονα συμμετρίας ή επιλέγουν ορθό αλγεβρικό ορισμό (ή ασαφή) βρίσκουν με επιτυχία συμμετρικά σημείου ως προς διάφορους άξονες, επιλύουν ορθά το πρόβλημα και επιλέγουν σε αλγεβρική έκφραση ορθές αναγνωρίσεις συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας.
Επομένως η εννοιολογική κατανόηση συνδέεται από τη φύση της με την αλγεβρική έκφραση εφόσον ουσιαστικά με αυτή την έκφραση εκφράζονται οι ορθοί ορισμοί.

2. Η συνέπεια της αλγεβρικής έκφρασης φαίνεται και από την ομάδα Db-Rab, δηλαδή η λάθος επιλογή ορισμού συνδέεται με λανθασμένη αναγνώριση σε αλγεβρική έκφραση.
3. Αντίθετα η αναγνώριση σε άλλα συστήματα αναπαράστασης, όπως σε μορφή πίνακα ή γραφικής παράστασης μπορεί να βασίζεται σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων και να μην απαιτεί εννοιολογική αναγνώριση.

7.4.2. ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ 1- ΟΛΑ ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ, 99%, 95%, 90%ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ



7.4.3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ 1

Το συνεπαγωγικό αυτό διάγραμμα έχει κατασκευαστεί με κλασσικό τρόπο εφαρμογής της συνεπαγωγικής ανάλυσης, δηλαδή ισχύουν μόνο οι ευθείες συνεπαγωγές και όχι οι αντιθετοαντίστροφες.
Παρατηρούνται οι εξής προφανείς σχέσεις:

Α) Συνεπαγωγές που συνδέουν λανθασμένες επιλογές.

1. Rgc → Rac (Λάθος→ Λάθος).
2. Rga → D3 (Λάθος→ Λάθος).
3. Cgb → D3 (Λάθος→ Λάθος).
4. Dd → D2 (Όσοι επιλέγουν λανθασμένο ‘ορισμό στην πράξη’ δίνουν ασαφή λεκτικό ορισμό).

Οι προηγούμενες τέσσερις συνεπαγωγές έχουν συνέπεια αφού αντιστοιχούν όλες σε λανθασμένες επιλογές.

Β) Συνεπαγωγές που συνδέουν ορθές επιλογές.

1. Pr→ Raa→ Rtb.
2. Pr→ Rad→ Ex → Rgb.
3. Pr→ S3→ Dc.
4. Pr→ S3→ Rgd.
5. Pr→ S3→ S4→ S2→ S1→ Rgb.

Σε όλες τις προηγούμενες η επίλυση του προβλήματος αποτελεί την αρχή των συνεπαγωγικών αλυσίδων. Αυτό δείχνει τη μεγάλη σημασία της επίλυσης προβλήματος στην εννοιολογική κατανόηση του φαινομένου ύπαρξης συμμετρίας σε μια συνάρτηση.
Υπάρχει μόνο μια συνεπαγωγική αλυσίδα με αρχική μεταβλητή τον ορθό ορισμό: D1 → S2 → S1 → Rgb.

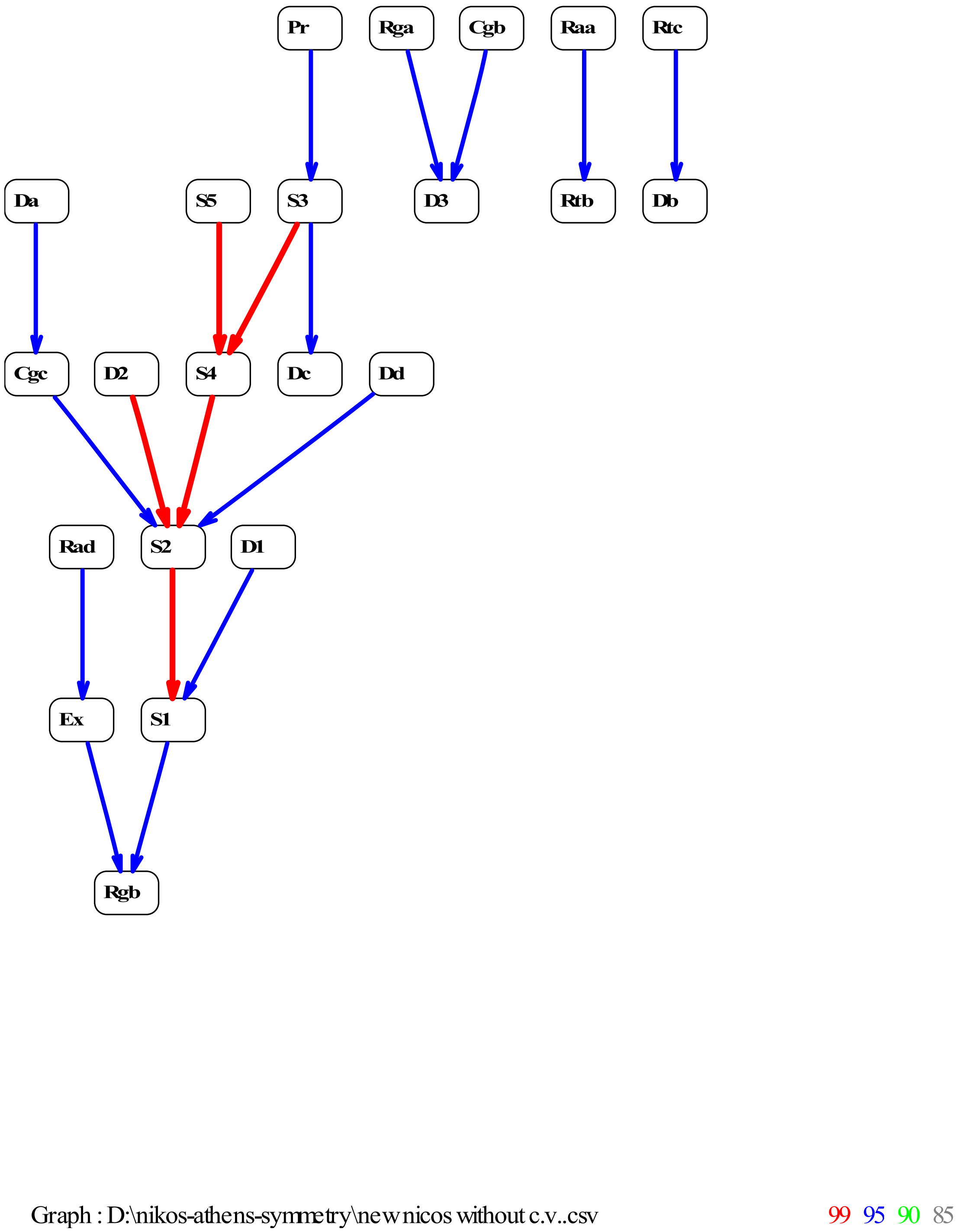
Γ) Συνεπαγωγές που συνδέουν λανθασμένες επιλογές ή ορισμούς με ορθές επιλογές.

1. Da → Cgc (Λάθος → Ορθό).
2. Da → Rtd (Λάθος → Ορθό).
3. Rtc → Db (Ορθό → Λάθος).
4. Dd → D2 → S2 → S1 → Rgb.

Οι άλλες συνεπαγωγικές σχέσεις επαληθεύουν τις παρατηρήσεις του διαγράμματος ομοιότητας.

7.4.4. ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ 2-ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ



7.4.5. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ 2

Το συνεπαγωγικό αυτό διάγραμμα, όπως και το προηγούμενο, έχει κατασκευαστεί με κλασσικό τρόπο εφαρμογής της συνεπαγωγικής ανάλυσης, δηλαδή ισχύουν μόνο οι ευθείες συνεπαγωγές και όχι οι αντιθετοαντίστροφες.
Παρατηρούνται οι εξής προφανείς σχέσεις:
Α) Συνεπαγωγές που συνδέουν λανθασμένες επιλογές.

1. Rga $\rightarrow$D3.
2. Cgb $\rightarrow$D3.

Οι προηγούμενες δύο συνεπαγωγές έχουν συνέπεια αφού αντιστοιχούν όλες σε λανθασμένες επιλογές.

Β) Συνεπαγωγές που συνδέουν ορθές επιλογές.

1. Raa $\rightarrow$ Rtb.
2. Pr $\rightarrow$ S3 $\rightarrow$ Dc.
3. Pr $\rightarrow$ S3 $\rightarrow$ S4 $\rightarrow$ S2 $\rightarrow$ S1 $\rightarrow$ Rgb.
4. S5 $\rightarrow$ S4 $\rightarrow$ S2$\rightarrow$ S1 $\rightarrow$ Rgb.
5. D1$\rightarrow$ S1$\rightarrow$ Rgb.
6. Rad$\rightarrow$ Ex$\rightarrow$ Rgb.

Γ) Συνεπαγωγές που συνδέουν λανθασμένους ή ασαφείς ορισμούς με ορθές επιλογές.

1. D2 $\rightarrow$ S2 $\rightarrow$ S1.
2. Da $\rightarrow$ Cgc $\rightarrow$ S2 $\rightarrow$ S1 $\rightarrow$ Rgb.

Δ) Συνεπαγωγές που συνδέουν ορθές επιλογές με λανθασμένες.

1. Rtc $\rightarrow$ Db.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟΥ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ 1

Επειδή μερικές συνεπαγωγές του συνεπαγωγικού διαγράμματος 1 είναι σε επίπεδο 90% (πράσινη σε έγχρωμο ή λεπτή γραμμή σε ασπρόμαυρο) ίσως δεν είναι πολύ σημαντικές, όπως η D1 $\rightarrow$ S2 $\rightarrow$ S1 $\rightarrow$ Rgb. Η συνεπαγωγή δεν υπάρχει στο συνεπαγωγικό διάγραμμα 2. Επίσης δεν υπάρχει το Dd $\rightarrow$ D2. Αντιθέτως το τμήμα S2 $\rightarrow$ S1 $\rightarrow$ Rgb παραμένει και στο 2.

8. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αρκετά συμπεράσματα αναλύσαμε κατά την αναφορά των στατιστικών επεξεργασιών. Στη συνέχεια, θα προσπαθήσουμε να συνοψίσουμε τα σημαντικότερα από αυτά.

1. Οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλέξουν την αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, ενώ φαίνεται ακόμη πιο δύσκολο έργο να δώσουν λεκτικά τον ορισμό του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
2. Οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλέξουν (δώσουν) την αλγεβρική (τυπική) έκφραση της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, ενώ φαίνεται ακόμη πιο δύσκολο έργο να δώσουν λεκτικά τον ορισμό του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
3. Οι μαθητές βρίσκουν ευκολότερα τα συμμετρικά σημείου ως προς τους άξονες x΄x και y΄y, ενώ το έργο αυτό για κατακόρυφο άξονα φαίνεται να είναι ευκολότερο από το αντίστοιχο για οριζόντιο ή πλάγιο.
4. Φαίνεται ότι αρκετοί μαθητές μπορούν να επιτύχουν σε έργα κατασκευής -συμπλήρωσης του τμήματος που λείπει από τη γραφική παράσταση συνάρτησης ώστε αυτή να έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y, ενώ ένα ‘ικανοποιητικό’ ποσοστό από αυτούς δίνει απαντήσεις που υποδεικνύουν ένα είδος σύγχυσης ενδοσυμμετρικής ή διασυμμετρικής συμμετρίας.
5. Φαίνεται ότι υπάρχει μια γενικότερη σύγχυση μεταξύ σχέσης και συνάρτησης τόσο σε επίπεδο γραφικής παράστασης όσο και σε επίπεδο αλγεβρικής έκφρασης.
6. Σε γενικές γραμμές οι μαθητές επιτυγχάνουν σε έργα αναγνώρισης κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε γραφική μορφή, ενώ σε ένα ‘ικανοποιητικό’ ποσοστό από αυτούς δημιουργείται σύγχυση διασυμμετρικής συμμετρίας.
7. Επίσης ο βαθμός επιτυχίας έργων που αφορούν σε αναγνώριση αξονικής συμμετρίας από τη γραφική παράσταση συνάρτησης (ενδοσυμμετρικά έργα συμμετρίας) εξαρτάται από τη διεύθυνση του άξονα (κατακόρυφος, οριζόντιος ή πλάγιος και πιθανά ποιος ακριβώς είναι), και τη μορφή της συνάρτησης.
8. Φαίνεται ότι υπάρχει δυσκολία στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y από την αλγεβρική της έκφραση.
9. Φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη πιθανού άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε μορφή κατάλληλου πίνακα τιμών, αλλά και το ενδεχόμενο λάθους είναι πολύ πιθανό να συμβεί σε μια τέτοια προσπάθεια.
10. Φαίνεται ότι οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά να επιλύσουν πρόβλημα λεκτικά δοσμένο που σχετίζεται με τετραγωνική συνάρτηση και τον άξονα συμμετρίας που έχει αυτή, ενώ η

αντιμετώπιση του προβλήματος ήταν σχεδόν μόνο με αλγεβρικό τρόπο. Την ύπαρξη του άξονα συμμετρίας της, την αξιοποίησε ένα πολύ μικρό ποσοστό.

11. Για επιλογή συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή ή μορφή πίνακα δεν απαιτείται η ορθή επιλογή ορισμού συνάρτησης με άξονα συμμετρίας. Η ορθή επιλογή αυτών των τελευταίων μπορεί να βασίζεται στα επιφανειακά χαρακτηριστικά μια γραφικής παράστασης ή διάταξης αριθμών σε πίνακα και όχι σε βαθιά εννοιολογική γνώση.
12. Το έργο της εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες που σχετίζεται μάλιστα με ισχυρή ομοιότητα με επίλυση σχετικού προβλήματος, δεν απαιτεί την γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.
13. Μαθητές που δεν αντιλαμβάνονται την ύπαρξη άξονα συμμετρίας συνάρτησης σε γραφική μορφή δεν μπορούν να αντιληφθούν και την αλγεβρική μορφή μιας τέτοιας συνάρτησης, στην περίπτωση που τον ρόλο του άξονα παίζει ο y΄y.
14. Η άγνοια του ορισμού στην περίπτωση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης θα μπορούσε να οδηγήσει αναφορικά με τη γραφική παράσταση σε σύγχυση με την έννοια του κέντρου συμμετρίας (διασυμμετρική σύγχυση).
15. Φαίνεται ότι η επιτυχία εκτέλεσης έργων εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες, της επίλυσης σχετικού προβλήματος αλλά και έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y όταν αυτή αναπαρίσταται σε αλγεβρική μορφή αλλά και με μορφή πίνακα τιμών, δεν σχετίζονται με γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.
16. Άτομα που δίνουν ορθό (ή ασαφή) ορισμό συνάρτησης με άξονα συμμετρίας ή επιλέγουν ορθό ορισμό (ή ασαφή) βρίσκουν με επιτυχία συμμετρικά σημείου ως προς διάφορους άξονες, επιλύουν ορθά το πρόβλημα και επιλέγουν σε αλγεβρική έκφραση ορθές αναγνωρίσεις συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας.

    Επομένως η εννοιολογική κατανόηση συνδέεται από τη φύση της με την αλγεβρική έκφραση εφόσον ουσιαστικά με αυτή την έκφραση εκφράζονται οι ορθοί ορισμοί.
17. Η επίλυση προβλήματος έχει μεγάλη σημασία στην εννοιολογική κατανόηση του φαινομένου ύπαρξης συμμετρίας σε μια συνάρτηση.

Ας ξαναδούμε τα ερευνητικά ερωτήματα που θέσαμε και να προσπαθήσουμε να δώσουμε συνοπτικά απαντήσεις για αυτά από τα αποτελέσματα της έρευνάς μας:

1. ***Ποιος είναι ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας;***

- Φαίνεται ότι οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη κατακόρυφου άξονα συμμετρίας συνάρτησης όταν αυτή δίνεται σε γραφική μορφή, ενώ ο βαθμός επιτυχίας έργων που αφορούν σε αναγνώριση αξονικής συμμετρίας από τη γραφική παράσταση συνάρτησης εξαρτάται από τη διεύθυνση του άξονα (κατακόρυφος, οριζόντιος ή πλάγιος και πιθανά ποιος ακριβώς είναι), και τη μορφή της συνάρτησης.
- Επίσης ότι μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη πιθανού άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε μορφή κατάλληλου πίνακα τιμών, αλλά με αυξημένη το ενδεχόμενο λάθους.
- Όμως φαίνεται ότι υπάρχει δυσκολία στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y από την αλγεβρική της έκφραση.
- Τέλος, μαθητές που δεν αντιλαμβάνονται την ύπαρξη άξονα συμμετρίας συνάρτησης σε γραφική μορφή δεν μπορούν να αντιληφθούν και την αλγεβρική μορφή μιας τέτοιας συνάρτησης, στην περίπτωση που τον ρόλο του άξονα παίζει ο y΄y.

1. ***Ποιος είναι ο ρόλος του ορισμού, των παραδειγμάτων και σχετικών έργων στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας;***

- Οι μαθητές δυσκολεύονται να επιλέξουν την αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, ενώ φαίνεται ακόμη πιο δύσκολο έργο να διατυπώσουν λεκτικά τον ορισμό του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.
- Για επιλογή συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας σε γραφική μορφή ή μορφή πίνακα δεν απαιτείται η ορθή επιλογή του ορισμού αυτού στην αλγεβρική του έκφραση.
- Επιπρόσθετα άγνοια του ορισμού στην περίπτωση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης θα μπορούσε να οδηγήσει αναφορικά με τη γραφική παράσταση σε σύγχυση με την έννοια του κέντρου συμμετρίας.
- Η επιτυχία εκτέλεσης έργων εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες, της επίλυσης σχετικού προβλήματος αλλά και έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y όταν αυτή

αναπαρίσταται σε αλγεβρική μορφή αλλά και με μορφή πίνακα τιμών, δεν σχετίζονται με γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.

- Όμως άτομα που δίνουν ορθό ή ασαφή ορισμό συνάρτησης με άξονα συμμετρίας ή επιλέγουν ορθό ή ασαφή ορισμό βρίσκουν με επιτυχία συμμετρικά σημείου ως προς διάφορους άξονες, επιλύουν ορθά το πρόβλημα και επιλέγουν σε αλγεβρική έκφραση ορθές αναγνωρίσεις συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας.

2. ***Πώς συσχετίζονται όλα τα παραπάνω με την επίλυση προβλήματος;***

- Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν αρκετά να επιλύσουν πρόβλημα λεκτικά διατυπωμένο που σχετίζεται με τετραγωνική συνάρτηση και τον άξονα συμμετρίας που έχει αυτή, ενώ η αντιμετώπιση του προβλήματος ήταν σχεδόν μόνο με αλγεβρικό τρόπο. Η ρητά αναφερόμενη ύπαρξη του άξονα συμμετρίας της, αξιοποιήθηκε από ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών.
- Η επίλυση σχετικού προβλήματος που σχετίζεται μάλιστα με ισχυρή ομοιότητα με το έργο της εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες, δεν απαιτεί την γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.
- Η επίλυση σχετικού προβλήματος, η επιτυχία εκτέλεσης έργων εύρεσης των συμμετρικών σημείου ως προς διάφορους άξονες, αλλά και έργων που σχετίζονται με την αναγνώριση μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y όταν αυτή αναπαρίσταται σε αλγεβρική μορφή αλλά και με μορφή πίνακα τιμών, δεν σχετίζονται με γνώση του αντίστοιχου ορισμού ή της τυπικής-αλγεβρικής σχέσης που απορρέει άμεσα από τον ορισμό αυτόν.
- Όμως άτομα που δίνουν ορθό ή ασαφή ορισμό συνάρτησης με άξονα συμμετρίας ή επιλέγουν ορθό ή ασαφή ορισμό επιλύουν ορθά το πρόβλημα όπως και βρίσκουν με επιτυχία συμμετρικά σημείου ως προς διάφορους άξονες, καθώς και επιλέγουν σε αλγεβρική έκφραση ορθές αναγνωρίσεις συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας.

9. ΠΕΡΙΓΡΑΜΜΑ ΜΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ

Ο προβληματισμός κάποιου 'μάχιμου' δάσκαλου μαθηματικών για το πώς θα πρότεινε να διδαχτεί μια μαθηματική έννοια, τον φέρνει σε δύσκολη θέση. Το πρώτο ίσως που σκέφτεται είναι αν η εν λόγω έννοια θα έπρεπε να αποτελέσει αντικείμενο διδασκαλίας.
Αν δώσει καταφατική απάντηση στο ερώτημα αυτό, φέρνει στο μυαλό του την υπάρχουσα διδακτική πρακτική, τις προσωπικές του διαπιστώσεις, επισημάνσεις ή ίσως και έρευνες μαζί με τις απόψεις ερευνητών που έχουν μελετήσει το συγκεκριμένο αντικείμενο και τέλος τα υλικοτεχνικά μέσα που πιθανά θα μπορούσαν να παρασχεθούν. Κατόπιν, λαμβάνοντας υπόψη όλα αυτά προσπαθεί να συνθέσει μια διδακτική πρόταση. Να προτείνει δηλαδή πώς θα διδαχτεί η έννοια αυτή.

Προσπαθώντας να κάνουμε τη δική μας πρόταση, για τη διδασκαλία της έννοιας του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, λειτουργήσαμε και εμείς μέσα στο παραπάνω πλαίσιο.
Αρχικά στο ερώτημα αν **πρέπει να διδάσκεται** η εν λόγω έννοια, η απάντηση που δώσαμε ήταν αναμφίβολα καταφατική. Η αξονική συμμετρία είναι ίσως η μοναδική μαθηματική έννοια που συνδέεται τόσο έντονα με την αίσθηση του 'αρμονικού' και του 'ωραίου'. Υπάρχει σε διάφορα αντικείμενα της καθημερινότητας του ανθρώπου, πράγμα που σημαίνει ότι θα έπρεπε να γίνει αντικείμενο διδασκαλίας αφού βρίσκει εφαρμογές στην πράξη.
Από την άλλη, τα παιδιά έχουν πρόσληψη της έννοιας αυτής μέσα από την αδιαμεσολάβητη εμπειρία, που προέρχεται από την επαφή τους με το φυσικό περιβάλλον. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Freudenthal θα μπορούσε η έννοια αυτή να αξιοποιηθεί διδακτικά.
Αλλά και η εκπαιδευτική κοινότητα υποστηρίζει τη διδασκαλία της έννοιας της συμμετρίας ως μιας βασικής γεωμετρικής έννοιας, η οποία θα έπρεπε να διδάσκεται στα Μαθηματικά (*Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2001)). Επιπρόσθετα βρίσκει εφαρμογές σε άλλες περιοχές των μαθηματικών αλλά και σε άλλα επιστημονικά πεδία συμπεριλαμβανομένης και της φυσικής.

Αν τώρα σκεφτούμε τη συμμετρία σε σχέση με τη συνάρτηση θα μπορούσαμε να πούμε αρχικά, ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με άξονα συμμετρίας αποτελεί ειδική περίπτωση σχήματος με άξονα συμμετρίας. Δεδομένου λοιπόν ότι η έννοια της συνάρτησης αποτελεί σημαντικό αντικείμενο διδασκαλίας, η συμμετρία συνάρτησης ως προς άξονα θα μπορούσε να αποτελέσει μια καλή συσχέτιση των δύο εννοιών σε θεωρητικό επίπεδο αλλά και με αξιόλογες χρήσεις σε ασκήσεις και προβλήματα κάποιων πλευρών της συνάρτησης (μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, ασύμπτωτες, όρια, ολοκληρώματα κ.α.) όπως και εφαρμογή στη μελέτη της.

Ο τρόπος με τον οποίο θα προτείναμε να διδάσκεται η συμμετρία συνάρτησης ως προς άξονα, αλλά να διαπιστώνεται κιόλας η κατανόηση αυτών που διδάχθηκαν από τους μαθητές, έχει να κάνει τόσο με τη γενικότερη θεωρία γνώσης και με απόψεις ερευνητών που υιοθετούμε, όσο και με τα αποτελέσματα της έρευνάς μας, αλλά και προσωπικές εμπειρίες.
Σύμφωνα με τη *θεωρία του Οικοδομισμού,* βιώνοντας ένας οργανισμός εμπειρίες οικοδομεί τις δικές του γνωστικές δομές (γνωστικά σχήματα) με στόχο την επίλυση προβλημάτων, όπως τα αντιλαμβάνεται ο ίδιος. Η αξία αυτών των γνωστικών δομών καθορίζεται από το πόσο καλά ταιριάζουν με την εμπειρία του οργανισμού, από την δυνατότητα που παρέχουν σ' αυτόν στο να κατανοεί και γενικότερα από τη βιωσιμότητά τους ως μέσων επίλυσης προβλημάτων.
Οι συνέπειες της άποψης του Οικοδομισμού για τη διδασκαλία είναι σημαντικές. Ο στρατηγικός στόχος της διδασκαλίας είναι η εννοιολογική οργάνωση της εμπειρίας του μαθητή από τον ίδιο. Πρέπει δηλ. κατά την προσπάθεια διδασκαλίας μιας διαδικασίας ή μιας έννοιας, να καθοδηγηθεί ο μαθητής σε μια τέτοια οργάνωση της εμπειρίας του, ώστε οι αναπαραστάσεις που δημιουργεί αυτός να ταιριάζουν με τις υπάρχουσες. Αλλά εκτός αυτού πρέπει οι αναπαραστάσεις που υπάρχουν στην πλευρά του δάσκαλου και του μαθητή να είναι συμβατές για να μπορεί να υπάρξει επικοινωνία μεταξύ τους, ώστε τελικά να οδηγηθεί ο μαθητής στην κατανόηση του διδακτικού στόχου.

Ο Freudenthal πιστεύει ότι η έννοια της συνάρτησης πρέπει να διδάσκεται με τη βοήθεια πολλών αναπαραστάσεών της όπως με τύπο, με γραφική παράσταση, πίνακα τιμών ή και λεκτική έκφραση. Άλλωστε, όπως ισχυρίζεται ο ίδιος ερευνητής, η λεκτική διατύπωση σε κάποιες περιπτώσεις αποτελεί τον μοναδικό τρόπο αναπαράστασης μιας συνάρτησης (π.χ. η συνάρτηση του Dirichlet: 'f(χ)=1, αν ο χ είναι ρητός και f(χ)=0, αν ο χ είναι άρρητος').
Η A. Sierpinska θεωρεί ότι θα πρέπει να ακολουθείτε μια τέτοια διδακτική πορεία, ώστε αρχικά οι μαθητές να μπορούν να **αναγνωρίζουν** τη συνάρτηση και να τη **διακρίνουν** από σχέσεις που δεν αποτελούν συνάρτηση. Μετά να υπάρξει **γενίκευση** της έννοιας ώστε να κατανοήσουν την δυνατότητα εφαρμογής της σε νέες καταστάσεις και τέλος **σύνθεση** της έννοιας με άλλες έννοιες που μέχρι εκείνη τη στιγμή θεωρούνταν ξεκομμένες.

Ο Hitt διέκρινε 5 επίπεδα κατανόησης στην κατασκευή της έννοιας της συνάρτησης (ανακριβείς ιδέες σχετικά με την έννοια- αναγνώριση διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας- μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από το ένα σύστημα στο άλλο- συνεκτική διασύνδεση μεταξύ δυο συστημάτων αναπαράστασης- συνεκτική διασύνδεση μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης στην επίλυση προβλήματος).

Οι παραπάνω απόψεις, θεωρούμε ότι θα μπορούσαν να εφαρμοστούν και στην ειδική περίπτωση της συνάρτησης με άξονα συμμετρίας.
Η υλοποίηση αυτή θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια παραδειγμάτων αλλά και έργων, που θα δοθούν προς τους μαθητές και θα ζητηθεί να εκτελεστούν από αυτούς, και αναφέρονται σε <u>συναρτήσεις που έχουν άξονα συμμετρίας, όπως και σε συναρτήσεις που δεν έχουν άξονα συμμετρίας</u>, σε όλες τις μορφές αναπαράστασης. Έτσι οι μαθητές θα μάθουν να αναγνωρίζουν και να διακρίνουν την έννοια του άξονα συμμετρίας συνάρτησης και να αποσαφηνίζεται για αυτούς η έννοια αυτή.

Από την έρευνά μας προκύπτουν σοβαρές ενδείξεις ότι οι μαθητές δεν δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν κατακόρυφο άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε γραφική μορφή, ενώ ο βαθμός επιτυχίας έργων που αφορούν σε γενικότερη αναγνώριση αξονικής συμμετρίας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση, εξαρτάται από τη διεύθυνση του άξονα (κατακόρυφος, οριζόντιος ή πλάγιος και πιθανά ποιος ακριβώς είναι), και τη μορφή της συνάρτησης.
Επίσης μπορούν να αναγνωρίσουν την ύπαρξη πιθανού άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε μορφή κατάλληλου πίνακα τιμών, αλλά με αυξημένο το ενδεχόμενο λάθους. Φαίνεται όμως ότι υπάρχει δυσκολία στην αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y από την αλγεβρική της έκφραση.
Τα παραπάνω συμπεράσματα μας προτρέπουν να προτείνουμε έργα αναγνώρισης αξονικής συμμετρίας συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση στα οποία μεταβάλλεται τόσο η διεύθυνση του άξονα όσο και η μορφή της συνάρτησης. Επίσης έργα αναγνώρισης αξονικής συμμετρίας συνάρτησης, όταν αυτή δίνεται σε μορφή κατάλληλου πίνακα τιμών, αλλά με ιδιαίτερη σημασία σε αυτά ώστε να μειωθεί η αυξημένη πιθανότητα λάθους, όπως και αρκετά έργα αναγνώρισης συνάρτησης με άξονα συμμετρίας τον y΄y από την αλγεβρική της έκφραση, ώστε να μειωθεί η δυσκολία που παρουσιάζουν τα τελευταία.

Όπως προκύπτει από διάφορες έρευνες (Sierpinska, Α. Γαγάτση, κ.α.) οι μαθητές, αλλά και οι φοιτητές συγχέουν μια οποιαδήποτε σχέση με την έννοια της συνάρτησης.
Το φαινόμενο αυτό το παρατηρήσαμε και εμείς στην έρευνά μας για την περίπτωση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, τόσο σε επίπεδο γραφικής παράστασης όσο και σε επίπεδο αλγεβρικής έκφρασης.

Θεωρούμε λοιπόν ότι θα έπρεπε να τονίσουμε στους μαθητές ότι η συνάρτηση με άξονα συμμετρίας είναι μια ειδική περίπτωση σχέσης με άξονα συμμετρίας και να επισημάνουμε (σε όλα τα συστήματα αναπαράστασης) την περίπτωση που κάποια <u>σχέση έχει άξονα συμμετρίας χωρίς να είναι συνάρτηση</u> π.χ. ο κύκλος, η έλλειψη κ.α.
Στο σημείο αυτό θα έπρεπε να δοθούν, αλλά και να ζητηθούν από τους μαθητές παραδείγματα από όλα τα συστήματα αναπαράστασης σχέσεων ή και συναρτήσεων που <u>δεν έχουν άξονα συμμετρίας</u>, ώστε συγκρίνοντας τις ομοιότητες και τις διαφορές με τη συνάρτηση που έχει άξονα συμμετρίας να αποσαφηνιστεί η έννοια αυτή.

Από την έρευνά μας φάνηκε καθαρά η μεγάλη δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στην επίλυση προβλήματος που σχετίζεται με (τετραγωνική) συνάρτηση και τον άξονα συμμετρίας που αυτή έχει. Η αντιμετώπιση του προβλήματος (έγινε) ήταν σχεδόν μόνο με αλγεβρικό τρόπο, ενώ την ύπαρξη του άξονα συμμετρίας της, την αξιοποίησε ένα πολύ μικρό ποσοστό.
Από το επαγωγικό διάγραμμα επίσης φάνηκε ότι αν καταφέρνει κάποιος να επιλύσει ένα πρόβλημα σχετικό με συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει άξονα συμμετρίας, τότε επιτυγχάνει σε πολλά έργα τα οποία σχετίζονται με την έννοια αυτή. Η επίλυση προβλήματος δηλαδή έχει μεγάλη σημασία στην εννοιολογική κατανόηση του φαινομένου ύπαρξης συμμετρίας σε μια συνάρτηση.
Αυτά που προέκυψαν από την έρευνά μας θα μπορούσαμε να τα συσχετίσουμε με απόψεις άλλων ερευνητών, όπως του Janvier, σύμφωνα με τις οποίες, η διαδικασία μετάφρασης από τη μια αναπαράσταση μιας έννοιας σε άλλη, αποτελεί μια δεξιότητα που είναι ιδιαίτερα σημαντική για την επίλυση προβλήματος. Δεδομένου ότι οι μεταφράσεις μιας έννοιας από το ένα αναπαραστασιακό σύστημα στο άλλο σχετίζονται άμεσα με την κατανόηση της έννοιας αυτής, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η κατανόηση μιας έννοιας σχετίζεται σημαντικά με την επίλυση προβλήματος.
Το γεγονός ότι το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε σχεδόν μόνο αλγεβρικά δείχνει αδυναμία ικανότητας μετάβασης από το ένα αναπαραστασιακό σύστημα σε άλλο και τελικά έλλειψη κατανόησης της έννοιας του άξονα συμμετρίας συνάρτησης από ένα μεγάλο ποσοστό μαθητών. Την άποψη αυτή την ισχυροποιεί και το γεγονός ότι ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών αξιοποίησε την ύπαρξη του άξονα συμμετρίας της συνάρτησης.
Θεωρούμε ότι η διδακτική αξιοποίηση όλων των παραπάνω μας κατευθύνει στη διδασκαλία έργων μεταφράσεων από το ένα αναπαραστασιακό σύστημα στο άλλο για συναρτήσεις με άξονα συμμετρίας και επίλυσης σχετικών προβλημάτων.
Από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι κατά τη διδασκαλία μας στα Μαθηματικά του Λυκείου δεν 'στεκόμαστε' αρκετά σε επίλυση

προβλημάτων, γεγονός που έχει να κάνει με το ποιο είναι το 'ζητούμενο' (θέματα) στις Πανελλήνιες εξετάσεις. Όμως θεωρούμε ότι **αν μας ενδιαφέρει η εννοιολογική κατανόηση του άξονα συμμετρίας συνάρτησης, όπως πιθανά και άλλων φαινομένων, θα πρέπει η επίλυση προβλήματος να διεισδύσει στη διδακτική μας πρακτική.**

Τέλος ένας προβληματισμός που προκύπτει από την έρευνά μας είναι αυτός που έχει να κάνει με το ρόλο που παίζει ο ορισμός του άξονα συμμετρίας συνάρτησης στην εννοιολογική κατανόηση του φαινομένου αυτού.

Διαπιστώσαμε ότι κάποια έργα που έχουν να κάνουν με την παραπάνω έννοια (αναγνώριση συνάρτησης με άξονα συμμετρίας σε μορφή πίνακα ή γραφικής παράστασης) μπορούν να τα εκτελέσουν οι μαθητές με επιτυχία χωρίς τη γνώση του ορισμού, βασιζόμενοι πιθανά σε επιφανειακά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων.

Όμως, από την άλλη, φάνηκε ότι άτομα που δίνουν ορθό (ή ασαφή) λεκτικό ορισμό συνάρτησης με άξονα συμμετρίας ή επιλέγουν ορθό(ή ασαφή) αλγεβρικό ορισμό, βρίσκουν με επιτυχία συμμετρικά σημείου ως προς διάφορους άξονες, επιλύουν ορθά το πρόβλημα και επιλέγουν σε αλγεβρική έκφραση ορθές αναγνωρίσεις συναρτήσεων με άξονα συμμετρίας.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι στη βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση του φαινομένου του άξονα συμμετρίας συνάρτησης σημαντικό ρόλο παίζει η γνώση της αλγεβρικής έκφρασης του ορισμού.

Θα πρέπει λοιπόν να δίνουμε ιδιαίτερη σημασία κατά τη διδασκαλία του ορισμού και κυρίως της αλγεβρικής έκφρασής του, ώστε να επιτυγχάνεται η εννοιολογική κατανόηση του φαινομένου του άξονα συμμετρίας συνάρτησης από τους μαθητές. Αυτό φυσικά θα έχει ως συνέπεια και την επιτυχέστερη εκτέλεση διαφόρων έργων, που αφορούν σε συναρτήσεις με άξονα συμμετρίας, από αυτούς.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτέλεσε μια πρωτόγνωρη εμπειρία για τον γράφοντα. Η μελέτη αρκετών βιβλίων και άρθρων της ελληνικής και της διεθνούς βιβλιογραφίας, η διαμόρφωση του ερωτηματολογίου με τη στατιστική επεξεργασία και την ερμηνεία της, και η σύνθεση όλων αυτών με τα συμπεράσματα και τις διδακτικές προτάσεις, ώστε να προκύψει ένα ενιαίο εννοιολογικά και όσο το δυνατόν αρτιότερο επιστημονικά και χρήσιμο διδακτικά σύγγραμμα ήταν μια δύσκολη αλλά και αρκετά δημιουργική προσπάθεια.
Εκτός της ανάγκης της συγγραφής της διπλωματικής αυτής, ώστε να κλείσει ο κύκλος των μεταπτυχιακών σπουδών, θεωρούμε ότι υπήρξαν και άλλα σημαντικότατα προσωπικά οφέλη για τον γράφοντα. Πλούτισε και εμβάθυνε τις γνώσεις του για την έννοια της συμμετρίας, της συνάρτησης και τις αναπαραστάσεις και έχει την ελπίδα ότι αυτές τις γνώσεις θα μπορέσει να τις αξιοποιήσει για τη βελτίωση της διδασκαλίας του.
Πιστεύουμε ότι μέσα από την έρευνα αυτή φάνηκαν κάποιες πτυχές της γνώσης των μαθητών αναφορικά με την αξονική συμμετρία συνάρτησης και επιπλέον κάποιες από τις διδακτικές μας προτάσεις ίσως βοηθήσουν σε μια καλλίτερη διδασκαλία του φαινομένου της συμμετρίας συνάρτησης ως προς άξονα.
Θεωρούμε ότι θα υπάρχουν αρκετές ατέλειες και ελλείψεις, που ευχή μας θα ήταν να βελτιωθούν και να συμπληρωθούν από άλλες σχετικές με το θέμα εργασίες που θα μπορούσαν να ακολουθήσουν βρίσκοντας γόνιμο το έδαφος πάνω στο οποίο οργώσαμε εμείς. Πάντως κάναμε μια ‘φιλότιμη προσπάθεια’.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Aspinwall L., Shaw L. K., Presmeg C. N. (1997). *Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Cpnnections between a Function and its Derivative.* Educational Studies in Mathematics, 33, 301-317.

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphical Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices, in E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (*p. 215-230), MAA.

ΒΟΣΝΙΑΔΟΥ, Σ., ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ, ΤΟΜΟΣ Α΄, GUTENBERG

Γαγάτσης, Α., Μιχαηλίδου, Ε. & Σιακαλλή, Μ. (2001). *Θεωρίες αναπαράστασης και μάθηση των Μαθηματικών.* Λευκωσία: ERASMUS IPI.

Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., Σπύρου Π. (2004) Επίλυση προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις. Λευκωσία εκδόσεις Intercollege.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. New York: McMillan.

Chevallard, Y., La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne. La Pensee Sauvage, Grenoble, France, 1985.

DeLoache, J. S., Uttal, D. H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The development of early symbolization: Educational implications. *Learning and Instruction, 8* (4), 325-339.

Dubinsky, E., & Harel G. (1992). *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*. Mathematical Association of America (MAA).

Dufour- Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Duval, R., (1987). Ο Ρόλος της Ερμηνείας στη Μάθηση των Μαθηματικών, *Διάσταση*, 2, 56-74.

Eisenberg T., Dreyfus T. (1991). *On the reluctance to visualize in mathematics*
(in W. Zimmermann and S. Cunningham: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*). Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 25-37.

Epley, N., Morewedge, C. K., & Keysar, B. (2004). Perspective taking in children and adults: Equivalent egocentrism but differential correction. *Journal of Experimental Social Psychology*, *40*, 760–768.

Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., Gagatsis, A., *University Students Conceptions of Functions*

Even, R. (1990). Subject-matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions, *Educational Studies in Mathematics*, 21, 521-544.

Even, R., (1993). Subject-matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Case of Functions, *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(2), 94-116.

Even, R., (1998). Factors Involved In Linking Representations of Functions, *The Journal of Mathematical Behavior,* 17 (1), 105-121.

Gagatsis, A. (1997). Problemi di interpretazione connessi con il concetto di funzione. *La Mathematica e la suα Didattica*, *2,* 132-149.

Gagatsis, A., Demetriou, A., Afantiti, Th., Michaelidou, E., Panaoura, R., Shiakalli, M., & Christoforides, M. (1999). L'influenza delle rappresentazioni "semiotiche" nella risoluzione di problemi additivi. *La Matematica e la sua Didattica*, *2*, 382-403.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J (1996). A joint perspective of the idea of representation in learning and doing mathematics. In von L. P. Steffe & Mahwah (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hitt, F., Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function, *The Journal of Mathematical Behavior,* 17 (1), 123-134.

Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8, p. 437-479.

Hoyles C., & Healy L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. *International journal of computers in mathematical learning*, *2* (1), 27-59.

Ηλία, Ι. και Γαγάτσης, Α. Η εικόνα στην επίλυση προβλήματος: Αρωγός ή εμπόδιο; Πανεπιστήμιο Κύπρου και Ίδρυμα Προώθησης Έρευνας, Λευκωσία 2004.

Janvier, C. (1987). Translation processes in Mathematics Education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Καλδρυμίδου, Μ., & Οικονόμου, Α. (1992). Δεξιότητα χειρισμού γραφικών παραστάσεων αποφοίτων λυκείου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 10-11,* 21-43.

Κολέζα, Ε., (2000) Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών, Leader Books, Αθήνα.

Kaput, J. J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kerslake, D., (1986). Graphs. In K. Hart (Ed), Children's Understanding of Mathematics (p.11-16). London: J. Murray.

Krutetskii V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. University of Chicago Press.

Larkin, J. και Simon H. 'Why a Diagram is (sometimes) Worth Ten Thousand Words', Cognitive Science, 11 (pp. 65-99) (1987).

Lean, G., & Clements, M. A. (1981). Spatial ability, visual imagery and mathematics performance. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 267-299.

Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky, O. (1997). Defining and Understanding Symmetry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st International Conference for the Psychology of Mathematics Education*: Vol. 3 (pp. 192-199). Lahti, Finland.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In

C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

MacFarlane S. (1964). *Spatial Ability, its Educational and Social Significance*. University of London Press.

Markovitz, Z., Eylon, B., & Bruckheimer M, (1986). Functions Today and Yesterday, *For the learning of Mathematics*, 6 (2), 18-28.

MASSEE International Congress on Mathematics, MICOM 2006

Mason, Burton και Stacey *Thinking Mathematically* Addison Wesley, London,UK,1982)

Norman, A. (1992) Teachers' Mathematical Knowledge of the Concept of Function, in E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (*p. 215-230), MAA.

Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο κατά το σχολικό έτος 2002-2003, Τεύχος Β'

Piaget, J. (1967). *Six psychological studies.* New York: Vintage

Polya, G (1957). How to solve it. New York: Doubleday.

ΠΡΑΚΤΙΚΑ 7ΟΥ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ και ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ και 4ΟΥ ΣΥΜΠΟΣΙΟΥ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΙΚΗΣ και ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ

Rosen, J. (1995). *Symmetry in science: an introduction to the general theory*.

Schwarz B. The Use of a Microworld to Improve Ninth Graders' Concept Image of a Function: the Triple Representation Model Curriculum, (Doctoral Dissertation, 1989) Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel)

Sierpinska, A., (1992) On understanding the notion of function, in E. Dubinsky & G. Harel (Eds), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (*p. 25-28), MAA Notes, Vol. 25.

Stanic, G.M.A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematical curriculum. In R. Charles, & E. Silver (Eds), The Teaching and Assessing of problem Solving (pp. 1-22). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates- NCTM.)

ΣΤ΄ ΠΑΓΚΥΠΡΙΟ ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ και ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ και Γ΄ ΣΥΜΠΟΣΙΟ ΑΣΤΡΟΝΑΥΤΙΚΗΣ και ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΟΣ (ΠΡΑΚΤΙΚΑ)

Vinner, S., & Dreyfus, T., (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education of America*.

Von Glaserfeld, E. (1987b). *Preliminaries to any Theory of Representation*. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Theory and Learning of Mathematics (pp. 215-225)*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and Language.* Cambridge, MA: MIT Press.

Φιλίππου, Γ., (2003) «Εισαγωγή στις βάσεις και τις Βασικές Έννοιες των Μαθηματικών, Β΄ Έκδοση, Ατραπός

Xistouri, X. & Pitta-Pantazi, D. ***SPATIAL ROTATION AND PERSPECTIVE TAKING ABILITIES IN RELATION TO PERFORMANCE IN REFLECTIVE SYMMETRY TASKS***

Zacks, J. M., Mires, J., Tversky, B., & Hazeltine, E. (2002). Mental spatial transformations of objects and perspective. *Spatial Cognition and Computation*, *2*, 315–332. 2006.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α.ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Ονοματεπώνυμο: Τάξη:
Σχολείο: Κατεύθυνση:

1. Πότε μια ευθεία *ε* λέγεται άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης;

Απάντηση:……………………………………………………………….
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
………………

2. Αν η συνάρτηση y=f(x) με πεδίο ορισμού το **R** έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y, ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

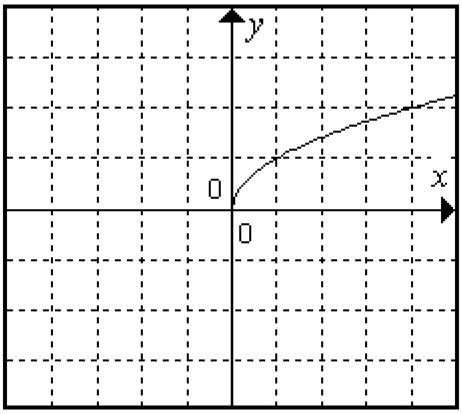
α) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με –x.
β) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με x.
γ) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με f(-x).
δ) Για κάθε τιμή του x το f(x) ισούται με f(x).

(κυκλώστε τα γράμματα που αντιστοιχούν στις σωστές απαντήσεις)

3. Δίνεται το σημείο Α(2, 5) του επιπέδου. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του συμμετρικού του ως προς:

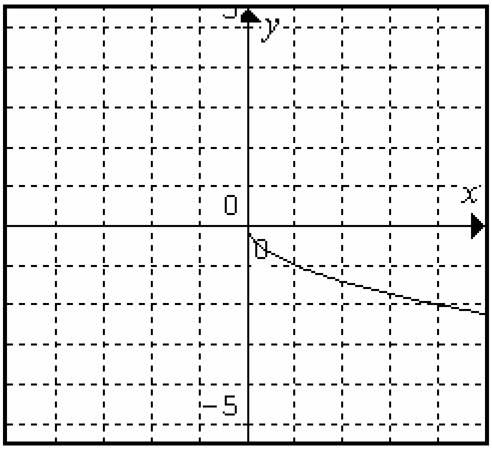
α) τον άξονα x΄x. ----> απάντηση: είναι το (…, …).
β) τον άξονα y΄y. ----> απάντηση: είναι το (…, …).
γ) την ευθεία y=x. ----> απάντηση: είναι το (…, …).
δ) την ευθεία x=1. ----> απάντηση: είναι το (…, …).
ε) την ευθεία y=1. ----> απάντηση: είναι το (…, …).

4. Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ένα **μέρος** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης που έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

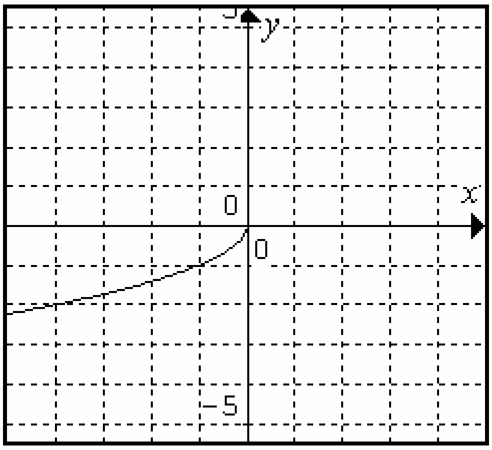


Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αποτελεί το **υπόλοιπο** τμήμα της; (κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση)

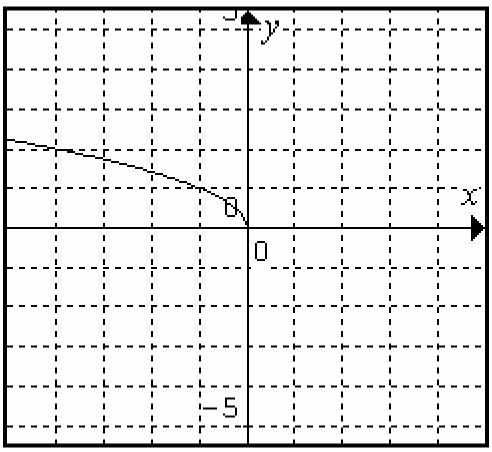
α)



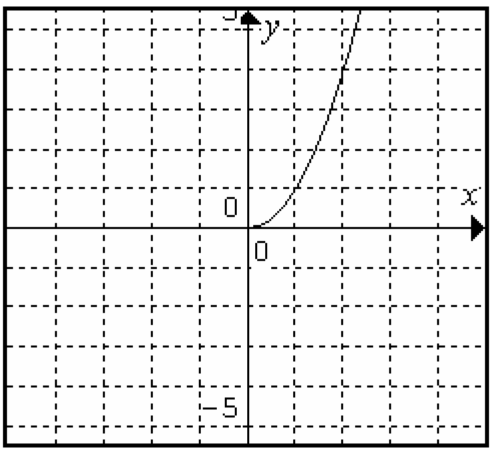
β)



γ)



δ)

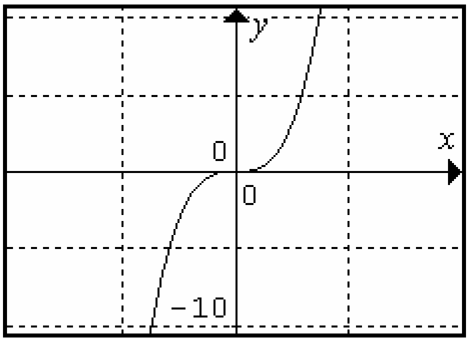


5. Δώστε τον τύπο μιας συνάρτησης, της οποίας η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας.

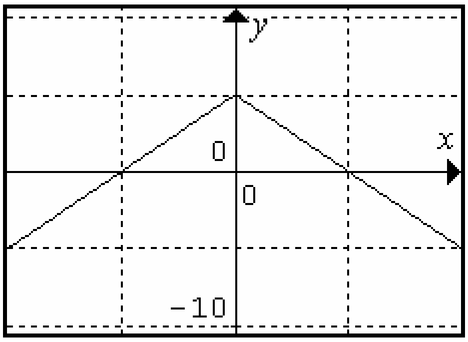
Απάντηση: ……………………………….

6. Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις ποια ή ποιες έχουν άξονα συμμετρίας;

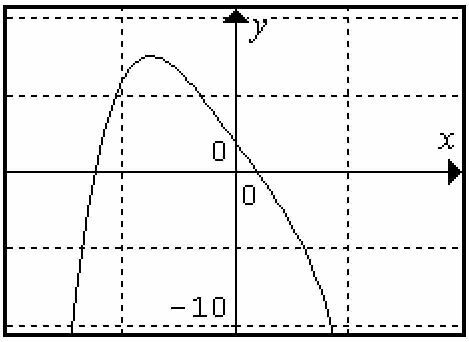
α)



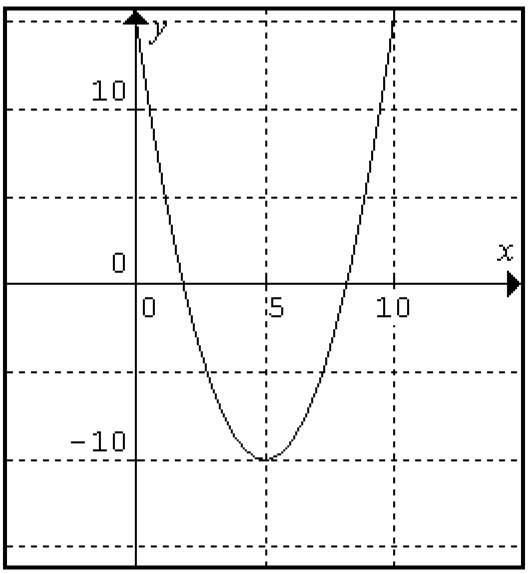
β)



γ)



δ)



(κυκλώστε τα γράμματα που αντιστοιχούν στις σωστές απαντήσεις)

7. Παρακάτω δίνονται οι τύποι ορισμένων συναρτήσεων. Ποιας (ποιών) από αυτές η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y και γιατί;

α) $y = x^2 + 1$, β) $y = \frac{1}{x}$, γ) $y = x$, δ) $y = 2|x| - 1$

(κυκλώστε τα γράμματα που αντιστοιχούν στις σωστές απαντήσεις και μετά στο χώρο που δίνεται αμέσως παρακάτω εξηγήστε το γιατί)

…………………………………………………………………………
…
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………
………

8. Ποιος (ποιοι) από τους παρακάτω πίνακες τιμών αντιστοιχεί (αντιστοιχούν) σε συνάρτηση που μπορεί να έχει άξονα συμμετρίας;

α)

x	-1	0	1	2
y	2	0	-2	-4

β)

x	-2	-1	0	1	2
y	3	0	1	0	3

γ)

x	-1	0	1	2	3
y	2	1	0	1	2

δ)

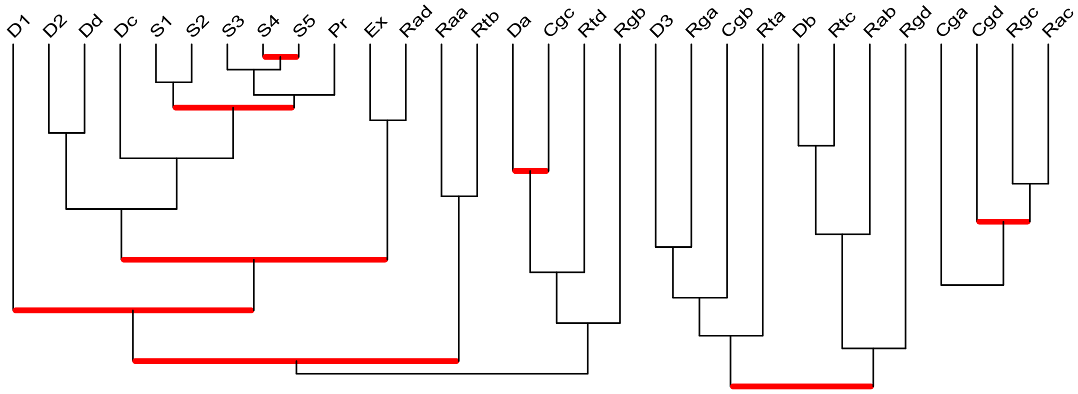
x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(κυκλώστε τα γράμματα που αντιστοιχούν στις σωστές απαντήσεις)

9. Να προσδιορίσετε τους συντελεστές α, β, γ της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha \neq 0$ αν γνωρίζουμε ότι αυτή τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (3,0) τον άξονα y΄y στο σημείο (0,-3) και η κορυφή της (που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας της παραβολής) έχει τετμημένη x=1. (Η λύση να γίνει στο τελευταίο φύλλο του ερωτηματολογίου, το οποίο είναι κενό).

Β. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Διάγραμμα ομοιότητας 1-Ολες οι μεταβλητές



Similarity : D:\nikos-athens-symmetry\new nicos without c.v..csv

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ 1

nb col : 30, nb lig : 139

	Occurrence	Average	Standard deviations:
D1	: 8.00	0.06	0.23
D2	: 47.00	0.34	0.47
D3	: 84.00	0.60	0.49
Da	: 25.00	0.18	0.38
Db	: 56.00	0.40	0.49
Dc	: 50.00	0.36	0.48
Dd	: 21.00	0.15	0.36
S1	: 70.00	0.50	0.50
S2	: 68.00	0.49	0.50
S3	: 21.00	0.15	0.36
S4	: 33.00	0.24	0.43
S5	: 15.00	0.11	0.31
Cga	: 55.00	0.40	0.49
Cgb	: 30.00	0.22	0.41
Cgc	: 62.00	0.45	0.50
Cgd	: 4.00	0.03	0.17
Ex	: 53.50	0.38	0.44
Rga	: 60.00	0.43	0.50
Rgb	: 104.00	0.75	0.43
Rgc	: 6.00	0.04	0.20
Rgd	: 80.00	0.58	0.49
Raa	: 41.00	0.29	0.46
Rab	: 35.00	0.25	0.43
Rac	: 48.00	0.35	0.48
Rad	: 22.00	0.16	0.36
Rta	: 54.00	0.39	0.49
Rtb	: 68.00	0.49	0.50
Rtc	: 33.00	0.24	0.43
Rtd	: 53.00	0.38	0.49
Pr	: 11.00	0.08	0.20

Correlation indexes:

D1 D2 D3 Da Db Dc Dd S1 S2 S3 S4 S5 Cga
Cgb Cgc Cgd Ex Rga Rgb Rgc Rgd Raa Rab Rac Rad Rta Rtb
Rtc Rtd Pr

D1 -0.18 -0.31 -0.12 -0.08 0.01 0.07 0.25 0.19 0.07 0.15 0.11 -0.01
0.02 0.03 -0.04 0.10 -0.03 0.07 -0.05 0.09 0.11 -0.14 0.02 -0.02 -0.07 0.01
0.01 -0.13 0.14
D2 -0.88 0.22 -0.06 -0.12 0.25 0.38 0.40 0.17 0.14 0.09 -0.05 -
0.23 0.18 -0.12 0.10 -0.29 0.27 0.07 -0.00 0.00 -0.03 -0.07 0.15 0.09 -0.06
-0.08 -0.03 0.12
D3 -0.16 0.09 0.12 -0.27 -0.48 -0.47 -0.19 -0.21 -0.15 0.05
0.21 -0.19 0.14 -0.14 0.29 -0.30 -0.05 -0.04 -0.06 0.10 0.06 -0.13 -0.05 0.06
0.07 0.09 -0.18
Da -0.23 -0.19 0.01 0.13 0.10 -0.09 -0.13 -0.04 -0.23 -0.11
0.26 0.03 0.10 0.12 0.06 0.08 -0.24 -0.02 0.07 -0.18 0.16 -0.07 -0.12 -0.04
0.21 -0.12
Db -0.22 -0.14 -0.27 -0.16 -0.18 -0.15 -0.14 0.03 0.14
-0.12 0.03 0.06 0.11 -0.10 0.04 -0.07 -0.15 0.17 0.05 -0.16 0.10 -0.10 0.27
0.05 -0.20
Dc -0.32 -0.01 -0.07 0.31 0.22 0.17 -0.09 0.08 -
0.01 0.05 0.06 0.01 0.05 -0.01 0.04 0.11 -0.09 -0.01 -0.04 0.08 0.14 -0.10
-0.09 0.19
Dd 0.26 0.27 -0.07 0.00 -0.02 0.15 -0.22
0.03 0.05 -0.12 -0.21 0.11 0.11 0.04 -0.05 -0.06 0.12 -0.13 0.03 0.03 -0.14
-0.17 -0.02
S1 0.80 0.26 0.49 0.30 -0.20 -0.14 0.34
-0.09 0.07 -0.30 0.29 -0.00 -0.10 0.11 -0.22 -0.01 0.12 -0.12 0.22 -0.19 -
0.17 0.33
S2 0.19 0.37 0.31 -0.09 -0.30 0.34 -
0.17 0.11 -0.36 0.30 0.08 -0.00 0.09 -0.14 -0.04 0.13 -0.13 0.19 -0.11 -0.09
0.32
S3 0.52 0.37 -0.18 -0.07 0.15
0.05 0.09 -0.21 0.06 -0.09 0.20 0.21 -0.15 -0.22 0.26 -0.09 0.07 0.10 -0.17
0.47
S4 0.62 -0.14 -0.01 0.11 0.01
0.09 -0.14 0.13 -0.12 0.03 0.16 -0.21 -0.05 0.08 -0.13 0.13 -0.03 -0.23 0.36
S5 -0.14 -0.01 0.15 -0.06
0.09 -0.21 0.15 -0.07 0.06 0.18 -0.15 -0.01 0.10 -0.13 0.12 -0.03 -0.08 0.27
Cga -0.35 -0.55 0.04
-0.07 -0.05 -0.01 0.05 -0.05 -0.07 -0.13 0.22 -0.11 -0.04 0.03 0.03 -0.06 -
0.08
Cgb -0.33 -0.09
0.02 0.18 -0.26 -0.03 0.10 -0.03 0.10 0.02 -0.08 0.12 -0.06 0.08 -0.09 -
0.19
Cgc -0.07
0.07 -0.08 0.29 -0.05 0.01 0.12 0.01 -0.23 0.13 -0.09 0.08 -0.09 0.13 0.19
Cgd -0.10
0.11 -0.20 0.18 0.06 -0.02 -0.10 0.15 -0.07 0.04 0.09 0.01 0.04 -0.07
Ex
0.01 0.22 -0.02 -0.04 0.08 -0.02 -0.12 0.34 -0.04 -0.15 0.24 0.05 0.16
Rga
-0.30 -0.11 -0.40 0.04 0.10 -0.02 -0.10 -0.01 -0.01 0.09 0.15 -0.22
Rgb
-0.12 -0.10 0.08 -0.08 -0.10 0.16 0.02 -0.06 -0.07 0.05 0.19
Rgc
0.04 0.02 -0.04 0.22 0.00 -0.10 0.15 0.05 0.05 -0.09
Rgd
0.08 0.03 -0.02 0.09 -0.00 0.05 0.14 -0.10 0.16
Raa
-0.30 -0.34 0.19 -0.03 0.25 0.01 0.11 0.26

Rab
-0.11 -0.12 0.12 -0.30 0.22 0.06 -0.15
Rac
-0.27 0.10 0.05 -0.12 0.05 -0.08
Rad
0.02 -0.11 0.17 -0.02 0.35
Rta
-0.40 -0.03 -0.02 -0.04
Rtb
-0.04 -0.12 0.10
Rtc
-0.19 0.21
Rtd
-0.09
Pr

Similarity indexes:

D1 D2 D3 Da Db Dc Dd S1 S2 S3 S4 S5 Cga
Cgb Cgc Cgd Ex Rga Rgb Rgc Rgd Raa Rab Rac Rad Rta Rtb
Rtc Rtd Pr

D1 1.00 0.05 0.01 0.12 0.25 0.53 0.76 0.98 0.94 0.76 0.94 0.89 0.46
0.58 0.59 0.32 0.79 0.40 0.66 0.28 0.74 0.86 0.08 0.56 0.41 0.26 0.52
0.53 0.12 0.86
D2 0.05 1.00 0.00 0.97 0.33 0.17 0.99 0.99 1.00 0.93 0.87 0.80 0.36
0.03 0.91 0.12 0.75 0.02 0.91 0.75 0.50 0.51 0.40 0.29 0.90 0.74 0.34
0.26 0.41 0.79
D3 0.01 0.00 1.00 0.15 0.71 0.75 0.03 0.01 0.01 0.09 0.09 0.15 0.62
0.92 0.15 0.85 0.22 0.95 0.13 0.37 0.42 0.36 0.73 0.64 0.18 0.39 0.62
0.68 0.70 0.18
Da 0.12 0.97 0.15 1.00 0.03 0.05 0.55 0.83 0.79 0.18 0.11 0.34 0.03
0.15 0.98 0.63 0.78 0.84 0.62 0.81 0.05 0.45 0.75 0.06 0.94 0.29 0.18
0.35 0.96 0.19
Db 0.25 0.33 0.71 0.03 1.00 0.06 0.12 0.04 0.15 0.06 0.12 0.11 0.57
0.87 0.21 0.62 0.66 0.78 0.33 0.65 0.35 0.13 0.90 0.65 0.10 0.76 0.26
0.98 0.64 0.10
Dc 0.53 0.17 0.75 0.05 0.06 1.00 0.00 0.49 0.31 1.00 0.96 0.94 0.27
0.75 0.47 0.68 0.66 0.54 0.60 0.46 0.59 0.80 0.23 0.47 0.37 0.72 0.82
0.20 0.24 0.90
Dd 0.76 0.99 0.03 0.55 0.12 0.00 1.00 0.98 0.98 0.26 0.50 0.43 0.90
0.02 0.58 0.69 0.18 0.05 0.72 0.87 0.60 0.32 0.29 0.85 0.10 0.62 0.59
0.09 0.08 0.45
S1 0.98 0.99 0.01 0.83 0.04 0.49 0.98 1.00 1.00 0.98 1.00 0.99 0.10
0.15 0.98 0.24 0.65 0.03 0.88 0.50 0.30 0.77 0.06 0.49 0.81 0.21 0.91
0.08 0.14 0.97
S2 0.94 1.00 0.01 0.79 0.15 0.31 0.98 1.00 1.00 0.93 1.00 0.99 0.29
0.01 0.98 0.08 0.74 0.01 0.90 0.73 0.49 0.74 0.16 0.38 0.84 0.20 0.88
0.22 0.28 0.97
S3 0.76 0.93 0.09 0.18 0.06 1.00 0.26 0.98 0.93 1.00 1.00 1.00 0.07
0.24 0.88 0.69 0.75 0.05 0.63 0.17 0.92 0.97 0.08 0.03 0.99 0.22 0.70
0.82 0.08 1.00
S4 0.94 0.87 0.09 0.11 0.12 0.96 0.50 1.00 1.00 1.00 1.00 1.00 0.13
0.48 0.80 0.52 0.74 0.13 0.75 0.12 0.59 0.91 0.03 0.34 0.78 0.14 0.83
0.38 0.03 0.99
S5 0.89 0.80 0.15 0.34 0.11 0.94 0.43 0.99 0.99 1.00 1.00 1.00 0.11
0.45 0.90 0.26 0.76 0.04 0.80 0.21 0.68 0.96 0.08 0.47 0.85 0.12 0.84
0.38 0.24 0.98
Cga 0.46 0.36 0.62 0.03 0.57 0.27 0.90 0.10 0.29 0.07 0.13 0.11 1.00
0.00 0.00 0.63 0.32 0.36 0.49 0.66 0.38 0.29 0.15 0.95 0.18 0.38 0.58
0.60 0.33 0.30

Cgb 0.58 0.03 0.92 0.15 0.87 0.75 0.02 0.15 0.01 0.24 0.48 0.45 0.00
1.00 0.01 0.18 0.55 0.92 0.09 0.40 0.74 0.39 0.81 0.58 0.21 0.84 0.33
0.76 0.24 0.08
Cgc 0.59 0.91 0.15 0.98 0.21 0.47 0.58 0.98 0.98 0.88 0.80 0.90 0.00
0.01 1.00 0.28 0.67 0.30 0.90 0.34 0.52 0.81 0.54 0.05 0.85 0.26 0.69
0.24 0.82 0.88
Cgd 0.32 0.12 0.85 0.63 0.62 0.68 0.69 0.24 0.08 0.69 0.52 0.26 0.63
0.18 0.28 1.00 0.20 0.83 0.12 0.98 0.68 0.43 0.16 0.92 0.21 0.64 0.77
0.52 0.65 0.29
Ex 0.79 0.75 0.22 0.78 0.66 0.66 0.18 0.65 0.74 0.75 0.74 0.76 0.32
0.55 0.67 0.20 1.00 0.53 0.83 0.42 0.41 0.71 0.45 0.21 1.00 0.39 0.18
0.96 0.64 0.82
Rga 0.40 0.02 0.95 0.84 0.78 0.54 0.05 0.03 0.01 0.05 0.13 0.04 0.36
0.92 0.30 0.83 0.53 1.00 0.09 0.16 0.01 0.62 0.77 0.44 0.21 0.47 0.47
0.77 0.86 0.08
Rgb 0.66 0.91 0.13 0.62 0.33 0.60 0.72 0.88 0.90 0.63 0.75 0.80 0.49
0.09 0.90 0.12 0.83 0.09 1.00 0.24 0.36 0.66 0.33 0.31 0.81 0.54 0.40
0.37 0.58 0.79
Rgc 0.28 0.75 0.37 0.81 0.65 0.46 0.87 0.50 0.73 0.17 0.12 0.21 0.66
0.40 0.34 0.98 0.42 0.16 0.24 1.00 0.62 0.57 0.34 0.98 0.52 0.19 0.89
0.69 0.68 0.25
Rgd 0.74 0.50 0.42 0.05 0.35 0.59 0.60 0.30 0.49 0.92 0.59 0.68 0.38
0.74 0.52 0.68 0.41 0.01 0.36 0.62 1.00 0.69 0.58 0.45 0.74 0.49 0.62
0.82 0.26 0.81
Raa 0.86 0.51 0.36 0.45 0.13 0.80 0.32 0.77 0.74 0.97 0.91 0.96 0.29
0.39 0.81 0.43 0.71 0.62 0.66 0.57 0.69 1.00 0.00 0.00 0.96 0.41 0.96
0.53 0.80 0.96
Rab 0.08 0.40 0.73 0.75 0.90 0.23 0.29 0.06 0.16 0.08 0.03 0.08 0.15
0.81 0.54 0.16 0.45 0.77 0.33 0.34 0.58 0.00 1.00 0.19 0.14 0.82 0.01
0.98 0.67 0.14
Rac 0.56 0.29 0.64 0.06 0.65 0.47 0.85 0.49 0.38 0.03 0.34 0.47 0.95
0.58 0.05 0.92 0.21 0.44 0.31 0.98 0.45 0.00 0.19 1.00 0.01 0.78 0.62
0.16 0.65 0.30
Rad 0.41 0.90 0.18 0.94 0.10 0.37 0.10 0.81 0.84 0.99 0.78 0.85 0.18
0.21 0.85 0.21 1.00 0.21 0.81 0.52 0.74 0.96 0.14 0.01 1.00 0.56 0.20
0.95 0.45 1.00
Rta 0.26 0.74 0.39 0.29 0.76 0.72 0.62 0.21 0.20 0.22 0.14 0.12 0.38
0.84 0.26 0.64 0.39 0.47 0.54 0.19 0.49 0.41 0.82 0.78 0.56 1.00 0.00
0.41 0.45 0.40
Rtb 0.52 0.34 0.62 0.18 0.26 0.82 0.59 0.91 0.88 0.70 0.83 0.84 0.58
0.33 0.69 0.77 0.18 0.47 0.40 0.89 0.62 0.96 0.01 0.62 0.20 0.00 1.00
0.39 0.22 0.72
Rtc 0.53 0.26 0.68 0.35 0.98 0.20 0.09 0.08 0.22 0.82 0.38 0.38 0.60
0.76 0.24 0.52 0.96 0.77 0.37 0.69 0.82 0.53 0.98 0.16 0.95 0.41 0.39
1.00 0.06 0.93
Rtd 0.12 0.41 0.70 0.96 0.64 0.24 0.08 0.14 0.28 0.08 0.03 0.24 0.33
0.24 0.82 0.65 0.64 0.86 0.58 0.68 0.26 0.80 0.67 0.65 0.45 0.45 0.22
0.06 1.00 0.28
Pr 0.86 0.79 0.18 0.19 0.10 0.90 0.45 0.97 0.97 1.00 0.99 0.98 0.30
0.08 0.88 0.29 0.82 0.08 0.79 0.25 0.81 0.96 0.14 0.30 1.00 0.40 0.72
0.93 0.28 1.00

Classification at level : 1 : (S4 S5) similarity : 1

Classification at level : 2 : (S3 (S4 S5)) similarity : 0.999999

Classification at level : 3 : (S1 S2) similarity : 0.999999

Classification at level : 4 : ((S3 (S4 S5)) Pr) similarity : 0.999442

Classification at level : 5 : ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)) similarity : 0.998325

Classification at level : 6 : (Ex Rad) similarity : 0.99518

Classification at level : 7 : (D2 Dd) similarity : 0.98658

Classification at level : 8 : (Db Rtc) similarity : 0.982706

Classification at level : 9 : (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr))) similarity : 0.979935

Classification at level : 10 : (Da Cgc) similarity : 0.979866

Classification at level : 11 : (Rgc Rac) similarity : 0.979034

Classification at level : 12 : (Raa Rtb) similarity : 0.961922

Classification at level : 13 : ((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) similarity : 0.954271

Classification at level : 14 : (Cgd (Rgc Rac)) similarity : 0.954066

Classification at level : 15 : ((Db Rtc) Rab) similarity : 0.952219

Classification at level : 16 : (D3 Rga) similarity : 0.947136

Classification at level : 17 : (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad)) similarity : 0.931841

Classification at level : 18 : ((Da Cgc) Rtd) similarity : 0.924892

Classification at level : 19 : (Cga (Cgd (Rgc Rac))) similarity : 0.846772

Classification at level : 20 : ((D3 Rga) Cgb) similarity : 0.845953

Classification at level : 21 : (D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))) similarity : 0.76606

Classification at level : 22 : (((Da Cgc) Rtd) Rgb) similarity : 0.721617

Classification at level : 23 : (((D3 Rga) Cgb) Rta) similarity : 0.585191

Classification at level : 24 : (((Db Rtc) Rab) Rgd) similarity : 0.553549

Classification at level : 25 : ((D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))) (Raa Rtb)) similarity : 0.521716

Classification at level : 26 : (((D1 (((D2 Dd) (Dc ((S1 S2) ((S3 (S4 S5)) Pr)))) (Ex Rad))) (Raa Rtb)) (((Da Cgc) Rtd) Rgb)) similarity : 0.381669

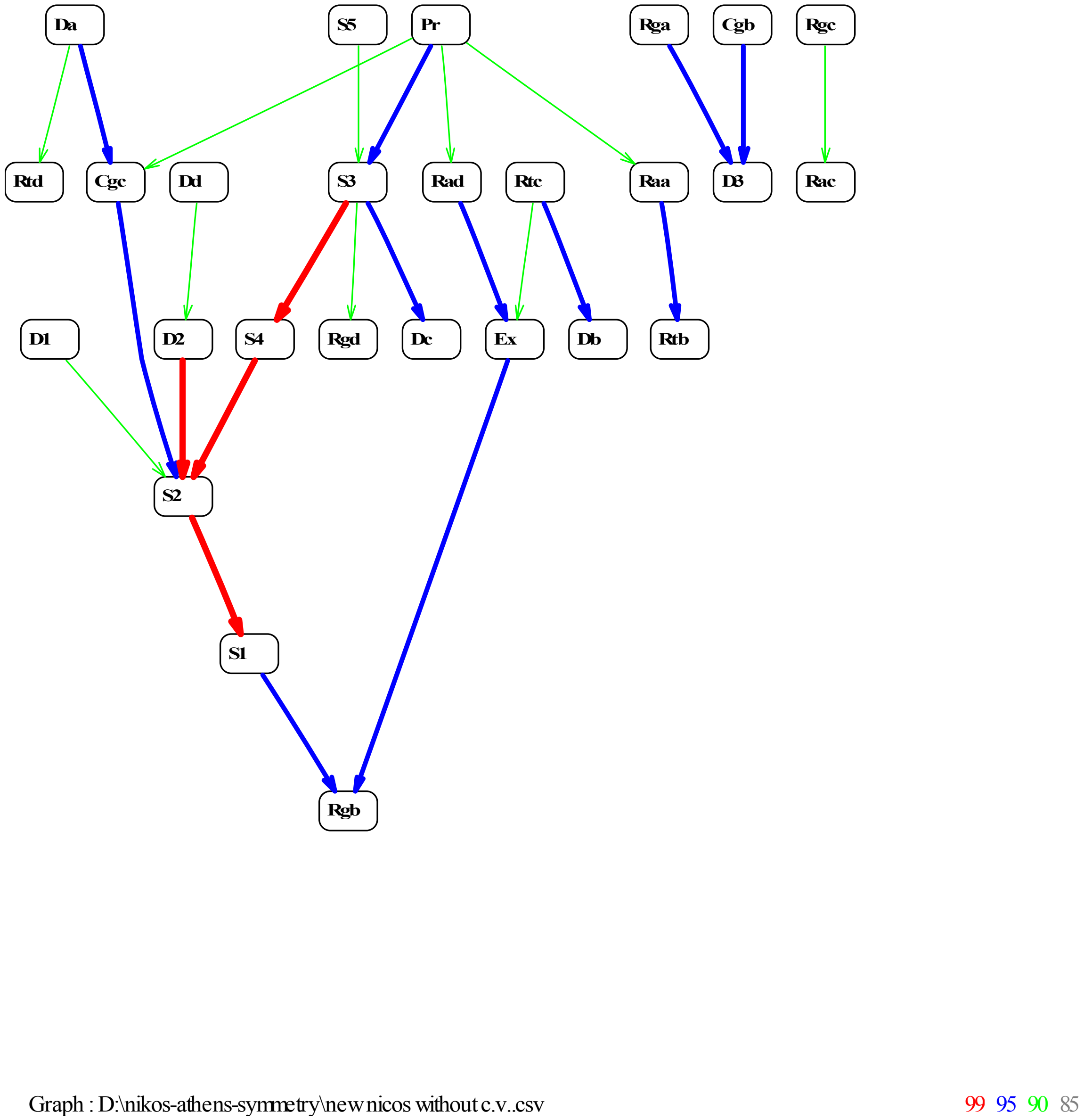
Classification at level : 27 : ((((D3 Rga) Cgb) Rta) (((Db Rtc) Rab) Rgd)) similarity : 0.107449

The most significant node is at level : 5

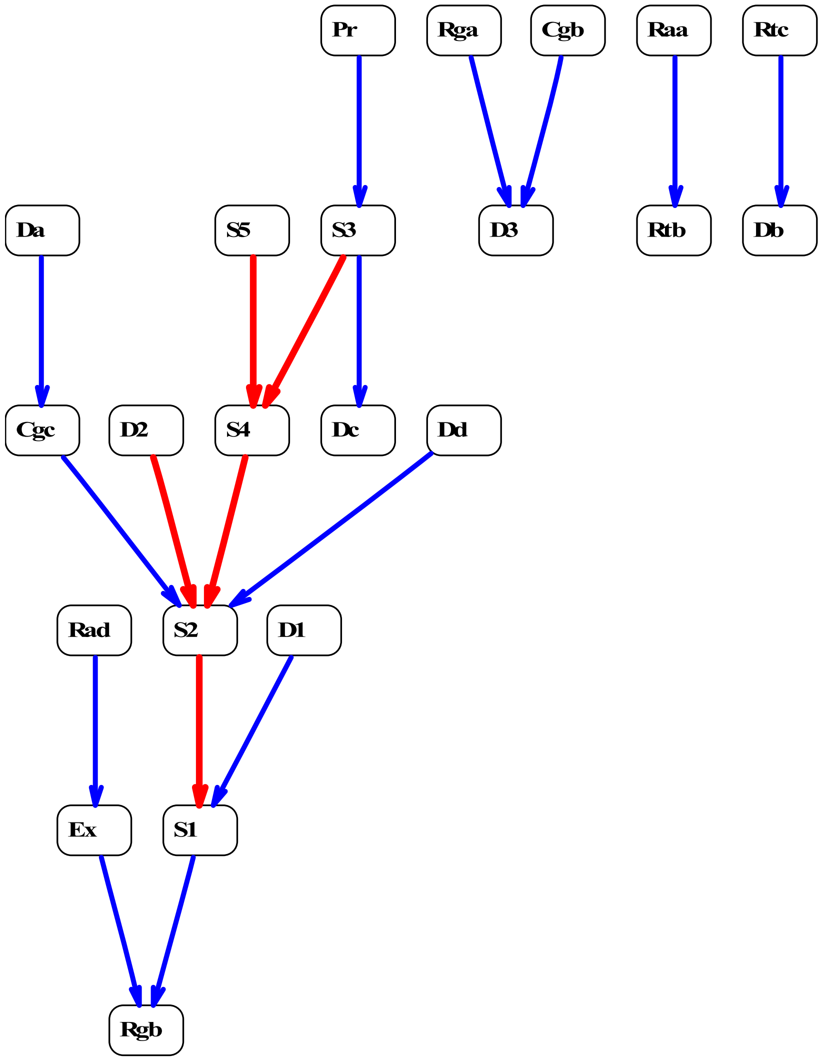
Significant nodes
at level: 1
at level: 5
at level: 10
at level: 14
at level: 17
at level: 21
at level: 25
at level: 27

Γ.ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ 1- ΟΛΑ ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ, 99%, 95%, 90%ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ



ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΙΚΟ 2-ΚΛΑΣΣΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ



Graph : D:\nikos-athens-symmetry\new nicos without c.v..csv 99 95 90 85