ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΛΕΜΟΝΗΣ Γ. ΑΡΓΥΡΙΟΣ

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΙΔΕΑΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ ΣΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Διπλωματική Εργασία
Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Σπύρου
Αθήνα Νοέμβριος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ....από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο		Βαθμίδα	Υπογραφή
1) Παναγιώτης Σπύρου	(επιβλέπων Καθηγητής)	Επίκουρος Καθηγητής	....
2) Δέσποινα Πόταρη		Αναπληρ. Καθηγήτρια	....
3) Διονύσιος Λάππας		Αναπληρ. Καθηγητής	....

στους γονείς μου

Ευχαριστώ πολύ

Τον κ. Παναγιώτη Σπύρου που με εμπιστεύθηκε, ενεργοποίησε με ουσιαστικό τρόπο την επιθυμία μου να ασχοληθώ με τα πως και γιατί της επιστήμης μας, και με τις ακριβείς επισημάνσεις του, σε δύσκολες στιγμές, λειτούργησε ως πραγματικός δάσκαλος

Την κ. Δέσποινα Πόταρη που με τις παρατηρήσεις της, συνέβαλλε αποφασιστικά στην ερευνητική πληρότητα της εργασίας

Τον κ. Διονύσιο Λάππα που με βοήθησε να δω πιο καθαρά πλευρές της Γεωμετρίας και της ιστορίας της, απαραίτητες σε κάθε διδακτική πράξη

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζει πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών, στην κατανόηση των Μαθηματικών εννοιών και το χειρισμό διαδικασιών που εφαρμόζονται στις έννοιες αυτές είναι ευρύτερα γνωστές. Τις τελευταίες δεκαετίες η Διδακτική των Μαθηματικών, με πληθώρα ερευνητικών εργασιών, έχει συμβάλει στην προσπάθεια κατανόησης των διαδικασιών που εμπλέκονται στην απόκτηση της γνώσης από τους μαθητές.

Μελετάται ιδιαίτερα και το διδακτικό μοντέλο όπου ο μαθητής έχει ενεργό ρόλο, ξεφεύγει από την θέση του παθητικού δέκτη πληροφοριών. Ο εκπαιδευτικός από μεταφορέας γνώσεων, γίνεται εμπνευστής και συντονιστής διδακτικών καταστάσεων που αναδεικνύουν την αναγκαιότητα της απόκτησης μαθηματικών γνώσεων και δεξιοτήτων, και η σχολική τάξη λειτουργεί, στα πλαίσια της παραπάνω θεωρίας, ως ερευνητική κοινότητα.

Επιστημονικές θεωρίες για την ίδια την φύση των Μαθηματικών θέτουν ερωτήματα όπως: Γιατί ο άνθρωπος **μπορεί** να δημιουργεί τα Μαθηματικά; **Πως** δημιουργούνται, και γιατί είναι **σωστά**; Κάθε συνδυασμός διαφορετικών απαντήσεων συγκροτεί πεποιθήσεις στους εκπαιδευτικούς που σε κάποιο βαθμό καθοδηγούν στην συνέχεια την διδακτική τους πρακτική.

Τα παραπάνω ερωτήματα που αφορούν την **δυνατότητα**, την **προέλευση**, και την **εγκυρότητα** των Μαθηματικών, αποτελούν αντικείμενο μελέτης της **Επιστημολογίας** των Μαθηματικών.

Ο ακρογωνιαίος λίθος της Μαθηματικής Επιστήμης που της προσδίδει το χαρακτηριστικό της βεβαιότητας, είναι η **απόδειξη**. Πως όμως καταλήγει ο Μαθηματικός, σε ένα αποτέλεσμα; Η εικόνα που προκύπτει από τα σχολικά εγχειρίδια είναι αυτή της **παραγωγικής** διαδικασίας που με αφετηρία ένα αξιωματικό σύστημα δημιουργεί συσωρευτικά κάθε νέα γνώση.

Είναι όμως αυτή η πορεία που ακολουθεί η Μαθηματική ανακάλυψη; Μήπως από επί μέρους παρατηρήσεις, προκύπτει **επαγωγικά** ένα γενικότερο συμπέρασμα και ακολουθεί η απόδειξή του με κάποια μαθηματική αποδεικτική μέθοδο;

Η ισόρροπη αξιοποίηση του παραγωγικού και του επαγωγικού τρόπου σκέψης υποστηρίζουμε πως μπορεί να επιτευχθεί στην διδασκαλία της Μαθηματικής Επαγωγής διότι από την φύση της είναι παραγωγική αποδεικτική διαδικασία αλλά, στο στάδιο που προηγείται (της εύρεσης της προς απόδειξη εικασίας) είναι δυνατό να αξιοποιηθεί και ο επαγωγικός συλλογισμός. Στο στάδιο αυτό εμφανίζεται η δυνατότητα χειρισμού **εννοιών** και καλλιέργειας της **ευρετικής** ικανότητας των παιδιών, και όχι μόνο η εκτέλεση **διαδικασιών** που οδηγούν σε προκαθορισμένο αποτέλεσμα.

Πολλές έρευνες έχουν εστιάσει στην σχέση μαθηματικών εννοιών-αντικειμένων και μαθηματικών διαδικασιών, και στον τρόπο που οι διαδικασίες οδηγούν στην γέννηση νέων αντικειμένων. Επίσης μελετάται η φύση των διαφόρων αποδεικτικών μεθόδων και οι δυσκολίες που προκαλούν στους μαθητές.

Η έρευνα που περιλαμβάνεται στην παρούσα εργασία εντάσσεται στην προσπάθεια διερεύνησης της αντίθεσης μεταξύ διαδικαστικής γνώσης (Procedural knowledge) και γνώσης του νοήματος (Meaning knowledge), αντίθεση η οποία στα πλαίσια του παραδοσιακού μοντέλου διδασκαλίας συνήθως λύνεται υπέρ της πρώτης, αφού η έμφαση δίνεται στον διαδικαστικό χειρισμό των Μαθηματικών εννοιών.

2. Η μαθηματική απόδειξη

Η σημασία της δικαιολόγησης στα μαθηματικά, για την επαλήθευση και επιβεβαίωση ισχυρισμών είναι τέτοια ώστε η αυγή της μαθηματικής επιστήμης να τοποθετείται γύρω στο 600 π.Χ. όταν εμφανίστηκαν οι πρώτες αποδείξεις από τον Θαλή το Μιλήσιο.

Από τις πολυάριθμες αναφορές στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά χαρακτηριστικά αναφέρουμε, «Από τα πιο αξιοσημείωτα δώρα που έχει κληρονομήσει ο ανθρώπινος πολιτισμός από την αρχαία Ελλάδα είναι η έννοια της μαθηματικής απόδειξης» (Babai, 1992)

Ιστορικά η έννοια της απόδειξης πέρασε από το αρχικό στάδιο (Αρχαία Ελλάδα) της απαραίτητης απαίτησης για αυστηρότητα, σε περιόδους (16^{o} έως 18^{o} αι.) όπου δόθηκε λιγότερη προσοχή στους αυστηρούς ορισμούς εννοιών, και το βάρος της ανακάλυψης έπεσε στον συμβολικό χειρισμό τους (Harel & Sowder, 1998). Η τακτική αυτή αποδείχθηκε εξαιρετικά γόνιμη, και λόγω των εφαρμογών των αποτελεσμάτων που παρήγαγε, απέκτησε μεγαλύτερη εγκυρότητα (Kleiner, 1991) .

Νέες προσπάθειες για μαθηματική αυστηρότητα οδήγησαν προς το τέλος του $19^{ου}$ αι. στην θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τον Dedekind και των θετικών ακεραίων από τον Peano και τον Frege (Boyer, 1989).

Οι άνθρωποι κάνουν συνεχώς **ενσυνείδητες παρατηρήσεις**. Αν έχουν αμφιβολίες για την αλήθεια των παρατηρήσεων αυτών τότε αυτές είναι **εικασίες**. Από την στιγμή που το άτομο θα βεβαιωθεί πως η εικασία που διατύπωσε είναι αληθής τότε αυτή μετατρέπεται σε **γεγονός**. Το άτομο **αποδεικνύει** (proving) όταν εκτελεί διαδικασίες απομάκρυνσης των αμφιβολιών του για την αλήθεια της εικασίας που διατύπωσε. Η διαδικασία της απόδειξης εμπεριέχει δύο υποδιαδικασίες, την **επιβεβαίωση** (ascertaining) κατά την οποία απομακρύνει τις δικές του αμφιβολίες , και την **πειθώ** (persuading) κατά την οποία εξαλείφει τις αμφιβολίες των άλλων για την αλήθεια της εικασίας (Harel & Sowder, 1998).

2.1 Αποδεικτικό σχήμα

Οι διαδικασίες αυτές (επιβεβαίωσης και πειθούς) υλοποιούνται με διαφορετικές μεθόδους, ανάλογα με την εποχή, την κουλτούρα και τις συνθήκες μέσα στις οποίες τα άτομα τις εφαρμόζουν, και συνεπώς για κάθε άτομο έχουν διαφορετικό περιεχόμενο. Συγκροτείται έτσι ένα **αποδεικτικό σχήμα** (proof scheme) εν τέλει υποκειμενικό.

Τα αποδεικτικά σχήματα είναι τριών κατηγοριών (Harel & Sowder, 1998), έχουν ψυχολογική βάση και αφορούν τον τρόπο σκέψης και δράσης των μαθητών.

- **Εξωτερικής πειθούς** (*external conviction*), όπου η φαινομενική εγκυρότητα προκύπτει είτε από την τήρηση του **τυπικού** τρόπου διατύπωσης των αποδείξεων (*ritual*), είτε από την **αυθεντία** διδασκόντων και εγχειριδίων (*authoritarian*), είτε από την γενίκευση της χρήσης **συμβόλων**, αυτονομημένων από το νόημά τους (*symbolic*).
- **Εμπειρικά** (*empirical*), όπου η δικαιολόγηση της αλήθειας μιας εικασίας προκύπτει **επαγωγικά** (*inductive*), από την ποιοτική αξιολόγησή της σε μία ή περισσότερες ειδικές περιπτώσεις αλλά και **αντιληπτικά** (*perseptual*), όπου συνάγονται συμπεράσματα από την οπτική παρατήρηση
- **Αναλυτικά** (*Analytical*), όπου το άτομο προσδίδει εγκυρότητα σε έναν ισχυρισμό μέσω της παραγωγικής Λογικής. Δύο υποκατηγορίες αναλυτικών αποδεικτικών σχημάτων παρατηρήθηκαν. Τα **μετασχηματιστικά** (*transformational*), που εμπλέκουν επεμβάσεις στα μαθηματικά αντικείμενα και προβλέψεις για τα αποτελέσματα των επεμβάσεων αυτών, και τα **αξιωματικά** (*axiomatic*) αποδεικτικά σχήματα, τα οποία θεωρείται πως κατέχει το άτομο που έχει κατανοήσει πως μια μαθηματική δικαιολόγηση έχει ως αφετηρία ορισμούς και αξιώματα.

Ως παράδειγμα μετασχηματιστικού αποδεικτικού σχήματος οι Harel και Sowder αναφέρουν την μαθηματική επαγωγή. Θεωρούν πως αναπτύσσεται σε τρία στάδια: κατασκευής (construction), αφομοίωσης (internalization), και εσωτερίκευσης (interiorization). Στο πρώτο στάδιο κατασκευάζεται μία ακολουθία αντικειμένων και οι μαθητές εστιάζουν στις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων αυτών. Για παράδειγμα, στην ακολουθία $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ldots$ μπορούν να διαπιστώσουν πως έχει άνω φράγμα το 2 παρατηρώντας τον μηχανισμό που δημιουργεί κάθε επόμενο όρο. Στο δεύτερο στάδιο αφομοιώνουν την επαγωγική μέθοδο (επαγωγικό συλλογισμό) αναγνωρίζοντας την χρησιμότητά του στην επίλυση προβλημάτων όπως το ακόλουθο:

[Αν $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}, \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{2+1}, \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{3+1}$, να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας $\alpha_\nu=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu(\nu+1)}$.]

Στο τρίτο στάδιο εσωτερικεύεται η μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτική μέθοδος, και εφαρμόζεται σε προβλήματα χωρίς κατ' ανάγκη να θεωρείται από τους μαθητές απαραίτητη. Για παράδειγμα στην απόδειξη ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν , $\log(a_1 a_2 \ldots a_\nu)=\log a_1+\log a_2+\ldots+\log a_\nu$, πιστεύουν πως η συνεχής εφαρμογή του γνωστού τύπου (ν=2) είναι αρκετή για να τους πείσει πως ο ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε ν.

Κατά τους παραπάνω ερευνητές ο τυπικός τρόπος παρουσίασης της μαθηματικής επαγωγής στα εγχειρίδια ακολουθεί αντίθετη πορεία. Προτάσσει προβλήματα (όπως την παραπάνω ιδιότητα των λογαρίθμων) που η λύση τους απαιτεί την άμεση εισαγωγή της τυπικής διατύπωσης της αρχής της μαθηματικής επαγωγής. Αυτό όμως ανατρέπει το αποδεικτικό σχήμα που (όπως πιστεύουν) ακολουθεί η μαθηματική ανάπτυξη των παιδιών στο συγκεκριμένο θέμα, και οδηγεί σε δυσκολίες στην κατανόησή του.

2.2 Η αναγκαιότητα της διδασκαλίας των αποδείξεων

Γιατί διδάσκονται συνεχώς οι αποδείξεις ήδη γνωστών προτάσεων; Με την συνεχή διδασκαλία των αποδείξεων αυξάνεται η κατανόηση των εννοιών, ενδυναμώνεται η εγκυρότητα των ισχυρισμών, δημιουργούνται κίνητρα για την δημιουργία νέων μαθηματικών, αμφιβολίες και παρανοήσεις απομακρύνονται (Davis & Hersh, 1981).

Η διδασκαλία της απόδειξης στα γυμνάσια πρέπει να στοχεύει, με την αξιοποίηση των αρχών του επαγωγικού και του παραγωγικού συλλογισμού, στην ανάπτυξη της ικανότητας όλων των μαθητών στην

- Δημιουργία και τον έλεγχο εικασιών
- Διατύπωση αντιπαραδειγμάτων
- Κατανόηση λογικών επιχειρημάτων
- Κρίση της εγκυρότητας των επιχειρημάτων
- Κατασκευή απλών και έγκυρων επιχειρημάτων

ώστε οι μαθητές που στοχεύουν στο λύκειο να μπορούν να κατασκευάζουν τυπικές αποδείξεις μαθηματικών προτάσεων, συμπεριλαμβάνοντας και έμμεσες αποδείξεις, καθώς και αποδείξεις με μαθηματική επαγωγή (NCTM, 1989).

2.3 Δυσκολίες στην διδασκαλία της απόδειξης

Πολυάριθμες έρευνες έχουν εστιάσει στις δυσκολίες που εμφανίζονται όταν οι μαθητές προσπαθούν να κατανοήσουν την έννοια της απόδειξης. Υψηλά ποσοστά μαθητών συνάγουν γενικά συμπεράσματα από την εξέταση ειδικών περιπτώσεων (Lovell, 1971; Goetting, 1995; Martin & Harel, 1989). Ο ρόλος των αντιπαραδειγμάτων και η επάρκειά τους στην διάψευση ισχυρισμών δεν είναι σαφής σε πολλούς μαθητές (Galbraith, 1981).

Αμφισβητείται η επάρκεια της απόδειξης και αναζητείται περαιτέρω εμπειρική επιβεβαίωση από μεγάλα ποσοστά μαθητών (Fischbein & Kedem, 1982) και επιπλέον θεωρούν την γενική απόδειξη είτε ως μέθοδο εξέτασης και επιβεβαίωσης της αλήθειας ειδικών περιπτώσεων του γενικού ισχυρισμού (Vinner, 1983), είτε ως μέθοδο που εγγυάται την αλήθεια του ισχυρισμού για γεωμετρικά αντικείμενα «παρόμοια στο χώρο» με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη (Martin & Harel, 1989)

Τέλος έχει παρατηρηθεί σε μαθητές λυκείου πως βλέπουν την απόδειξη ως κάτι που επιβεβαιώνει εποπτικά προφανείς και ήδη αληθείς ισχυρισμούς (Schoenfeld, 1985).

Αρκετές προτάσεις για την υπέρβαση των δυσκολιών κατευθύνονται στην αλλαγή του τρόπου διδασκαλίας της απόδειξης. Οι Alibert και Thomas, (1991) θεωρούν πως η παρουσίαση των μαθηματικών γενικά και των αποδείξεων ειδικότερα, ως ολοκληρωμένων προϊόντων, καθιστούν τους μαθητές παθητικούς δέκτες αντί για συνεργάτες στην κατασκευή της γνώσης, και επισημαίνουν: «*η διαμάχη μεταξύ της πρακτικής των μαθηματικών από τη μια μεριά, και των διδακτικών μεθόδων τους από την άλλη, παράγει προβλήματα στους μαθητές..*» . Καταλήγουν στην πρόταση να δοθεί έμφαση στη φύση της απόδειξης. Θεωρούν την απόδειξη δραστηριότητα κοινωνικού χαρακτήρα που βοηθά να καταλάβουμε γιατί ένας ισχυρισμός είναι αληθής.

Σύμφωνα με τον Usiskin (1980) η αποτυχία κατά την διδασκαλία της απόδειξης οφείλεται στο γεγονός ότι δεν λαμβάνονται υπόψη το πότε , το γιατί, και το πώς οι μαθηματικοί γράφουν αποδείξεις. Θεωρεί πως ο μαθηματικός προχωρά **εξερευνώντας και εικάζοντας**, δεν αναζητά αποδείξεις καλά διατυπωμένων προτάσεων. Ενώ υπάρχουν πολλοί τύποι αποδείξεων, διαφορετικοί μεταξύ τους (μαθηματική επαγωγή, ε-δ απόδειξη στην ανάλυση, κτλ) οι μαθητές έρχονται ουσιαστικά σε επαφή μόνο με τις αποδείξεις της γεωμετρίας. Τέλος ο Usiskin πιστεύει πως για τους πιο προφανείς ισχυρισμούς δεν απαιτείται η αυστηρά τυπική γραφή των αποδείξεων (συνήθως σε δύο στήλες) με αναλυτική αναγραφή όλων των δεδομένων που απαιτούνται σε αυτές. Η προσέγγιση αυτή προτείνεται και από άλλους ερευνητές της εκπαίδευσης (Shaughnessy &Burger, 1985; MacPherson, 1985; Semadeni 1980, etc) .

3. Ευρετική μέθοδος – Επαγωγική σκέψη

Ο τρόπος παρουσίασης των μαθηματικών προτάσεων στα σχολικά εγχειρίδια ακολουθεί την παραγωγική λογική. Στην γεωμετρία ακολουθείται μια χαλαρότερη από παλιότερα αξιωματική προσέγγιση αναφέρονται κάποια αξιώματα και ορισμοί, και στην συνέχεια παράγονται αλυσιδωτά τα θεωρήματα. Στην Μαθηματική Ανάλυση δεν αναφέρονται αξιώματα θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών και (όπως και στην αναλυτική γεωμετρία) οι διατυπώσεις των θεωρημάτων πότε προηγούνται και πότε έπονται των αποδείξεων.

Επισημαίνεται πως η έλλειψη στοιχειώδους επαφής των μαθητών με την Μαθηματική Λογική δημιουργεί εμπόδια στην χάραξη στρατηγικών επίλυσης ασκήσεων, που απαιτούνται από το αναλυτικό πρόγραμμα.

Από την στιγμή που μια θεσμοποιημένη -από την μαθηματική κοινότητα- γνώση υπόκειται στον απαραίτητο διδακτικό μετασχηματισμό προκύπτει το ερώτημα αν πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η πορεία ανακάλυψης της γνώσης που πρόκειται να διδαχθεί.

Μήπως οι παράμετροι που καθορίζουν τον διδακτικό μετασχηματισμό επιβάλλουν συγκεκριμένη παρουσίαση ανεξάρτητη από την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα;

Με πληθώρα πηγών που παραθέτει ο Lakatos (Αποδείξεις και ανασκευές, 1996, σελ.116-117) υποστηρίζεται πως οι μαθηματικοί γνωρίζουν ή διαισθάνονται το μαθηματικό αποτέλεσμα (θεώρημα) που θέλουν να φτάσουν και το μεγάλο μέρος της ενέργειάς τους καταναλώνεται στην προσπάθεια απόδειξής του. Χαρακτηριστικά αναφέρεται η δήλωση του Gauss: «*Έχω τα αποτελέσματά μου εδώ και πολύ καιρό, αλλά δεν ξέρω πώς να καταλήξω σ' αυτά*».

Και συνεχίζει

«*Μερικοί μελετητές που υπερασπίζονται το παραγωγικό ύφος θεωρούν ότι η παραγωγή είναι το ευρετικό σχήμα των μαθηματικών, ότι είναι η λογική της ανακάλυψης.*»

Ο Lakatos (ibid. σελ. 212) αναφέρει πως η εισαγωγή στοιχείων ευρετικής ανάλυσης στο μαθηματικό ύφος φωτίζει τις γενεσιουργούς αιτίες των μαθηματικών εννοιών, δίνοντας έμφαση στην προβληματική κατάσταση που οδήγησε στην εισαγωγή μιας νέας έννοιας. Αντιπαραθέτει την ευρετική ανάλυση στο παραγωγικό ύφος, όπου οι ορισμοί παρουσιάζονται στην αρχή, καλλιεργώντας την εικόνα της αυθεντίας. Θεωρεί επίσης πως μόνο αν περιορίσουμε τα μαθηματικά στο πλαίσιο ενός τυπικού συστήματος, μπορούμε να αποδεχθούμε το παραγωγικό ύφος της ανακάλυψης. Οι προσπάθειες όμως να θεμελιωθούν τα μαθηματικά στην λογική, τερματίστηκαν με τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel.

Ο J.Hintikka (The principles of mathematics revisited, 2003) θεωρεί πως η μη πληρότητα προκαλεί αδυναμία μηχανιστικής παραγωγής όλων των θεωρημάτων που μπορεί να δώσει μια θεωρία και δεν αγγίζει την δημιουργική εργασία του ενεργού μαθηματικού. Συγκεκριμένα αναφέρει: *«Μόνο ένα εξαιρετικά μικρό μέρος του πραγματικού έργου ενός ενεργού μαθηματικού συνίσταται στην παραγωγή θεωρημάτων που προκύπτουν από αξιώματα με παραγωγικό τρόπο, παρά τις προκαταλήψεις των φιλοσόφων».*

Ο G.Polya (Πώς να το λύσω, 1944) παρουσιάζει την ευρετική όψη των μαθηματικών και των δυνατοτήτων που αυτή προσφέρει στην κατεύθυνση της αναζωογόνησης της σκέψης των παιδιών. Με σαφήνεια και λιτότητα καταγράφεται ο κεντρικός άξονας προβληματισμού του συγγραφέα, ο οποίος συνδέει την ευρετική μέθοδο με την επαγωγική λογική.

«Σύμφωνα με τον Ευκλείδη τα μαθηματικά παρουσιάζονται σαν μια συστηματική, αφαιρετική (συμπερασματική) επιστήμη, αλλά τα μαθηματικά «έν τω γεννάσθαι» παρουσιάζονται σαν μια πειραματική, επαγωγική επιστήμη. Και οι δύο απόψεις είναι τόσο παλιές όσο η ίδια η επιστήμη των μαθηματικών. Όμως η δεύτερη είναι νέα από μια άποψη· μαθηματικά «in statu nascedi», δεν έχουν παρουσιαστεί ποτέ πριν μ΄αυτό τον τρόπο στον μαθητή ή στον ίδιο το δάσκαλο ή στο πλατύ κοινό.» (σελ. 17)

Παρατηρούμε πως συνδέεται η επιστημολογική άποψη για την δημιουργία των μαθηματικών, με την κατεύθυνση που θα πρέπει να έχει η διδακτική τους παρουσίαση. Σε αντίθεση με την καθιερωμένη παραγωγική παρουσίαση και διδασκαλία των μαθηματικών, που όπως πιστεύει μας παρασύρει στην άποψη πως τα μαθηματικά κατασκευάζονται παραγωγικά, προτείνει την επαγωγική παρουσίαση.
Στην παράγραφο που αναφέρεται στην μαθηματική επαγωγή και την επαγωγή γενικότερα, διακρίνονται οι δύο έννοιες, διότι η μαθηματική επαγωγή, παρά το όνομά της, είναι παραγωγική μέθοδος αφού, είτε έχει θέση αξιώματος (στο σύστημα του Peano) είτε αποδεικνύεται ως θεώρημα από την αρχή του ελαχίστου (αν αυτή έχει θέση αξιώματος). Εντάσσεται δηλαδή στο παραγωγικό πλαίσιο: αξίωμα-θεώρημα.

Συγκεκριμένα αναφέρει: *«Επαγωγή είναι η διαδικασία ανακάλυψης γενικών νόμων, μέσω της παρατήρησης και του συνδυασμού ειδικών περιπτώσεων (παραδειγμάτων). Χρησιμοποιείται σε όλες τις επιστήμες, ακόμη και στα μαθηματικά. Η μαθηματική επαγωγή χρησιμοποιείται μόνο στα μαθηματικά, για την* ***απόδειξη*** *ενός ορισμένου είδους θεωρημάτων. Η σύνδεση που υπάρχει ανάμεσα στις δύο ονομασίες είναι μάλλον ατυχής, μια και υπάρχει πολύ μικρή λογική σύνδεση μεταξύ των δύο διαδικασιών.* ***Υπάρχει, ωστόσο κάποια πρακτική σύνδεση·συχνά χρησιμοποιούμε και τις δύο μεθόδους μαζί.*** *»* (Σελ. 151)

Είναι σαφές πως δεν αρκείται στην διάκριση επαγωγικού συλλογισμού και μαθηματικής επαγωγής, αλλά το ενδιαφέρον στοιχείο της προσέγγισής του νομίζουμε πως είναι η πρακτική συσχέτιση των δύο μεθόδων, που οδηγεί σε ευρετικές διαδικασίες διατύπωσης εικασιών και στην εν συνεχεία θεσμοποίηση κάποιων από αυτές σε μαθηματική γνώση, θεωρώντας πως αυτή είναι και η διαδρομή της μαθηματικής ανακάλυψης.

Τέλος στο θέμα του ονόματος της μαθηματικής επαγωγής και της σύγχυσης που μπορεί να δημιουργήσει ο G.Polya αναφέρει: *« Ο ακριβής ισχυρισμός που* *πρέπει να αποδείξουμε μπορεί να προέρχεται από οποιαδήποτε πηγή, και από λογική άποψη δεν έχει σημασία ποια είναι αυτή η πηγή. Τώρα, πολλές περιπτώσεις, όπως και η περίπτωση που συζητήσαμε εδώ λεπτομερώς, προέκυψαν από την επαγωγή. Ο ισχυρισμός βρέθηκε πειραματικά κι έτσι* ***η απόδειξη εμφανίζεται σαν ένα μαθηματικό συμπλήρωμα της επαγωγής·*** *αυτό εξηγεί την ονομασία» (Σελ. 158)*

Συνεπώς ο επαγωγικός συλλογισμός και η μαθηματική επαγωγή αν και σε αντίθετες κατευθύνσεις ως μέθοδοι απόκτησης και επιβεβαίωσης της νέας γνώσης μπορούν να αλληλοσυμπληρωθούν.

4. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής

4.1 Αξίωμα-Αρχή της επαγωγής

(Μυτιληναίος & Κατερίνης, 1993, Διακριτά Μαθηματικά σελ. 34-36)

Έστω $X \subseteq \mathbb{N}$ με τις ακόλουθες δύο ιδιότητες: 1) $0 \in X$ και 2) για κάθε φυσικό n, αν $n \in X$ τότε $n+1 \in X$. Τότε $X = \mathbb{N}$.

Έστω Φ μια ιδιότητα των φυσικών. Το σύμβολο Φ(n) σημαίνει πως το n έχει την ιδιότητα Φ. Τότε η αρχή της επαγωγής διατυπώνεται ως εξής:

4.2 Επαγωγική απόδειξη

Έστω Φ μια ιδιότητα των φυσικών τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

1) Φ(0) , δηλαδή το 0 έχει την ιδιότητα Φ.
2) αν Φ(n), τότε Φ(n+1), δηλαδή αν για κάθε n που έχει την ιδιότητα Φ, τότε το n+1 έχει την ιδιότητα Φ.

Τότε Φ(n) για κάθε $n \in \mathbb{N}$, , δηλαδή όλοι οι φυσικοί έχουν την ιδιότητα Φ.

Η παραπάνω διατύπωση της αρχής της επαγωγής λέγεται και επαγωγική απόδειξη. Συχνά θέλουμε να αποδείξουμε πως μια ιδιότητα Φ των φυσικών ισχύει για όλους τους φυσικούς $n > k \in \mathbb{N}$. Τότε χρησιμοποιούμε μια γενικευμένη μορφή της αρχής της επαγωγής

4.3 Γενικευμένη αρχή της επαγωγής

Έστω Φ μια ιδιότητα των φυσικών τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

1) Φ(κ+1) , δηλαδή το κ+1 έχει την ιδιότητα Φ.
2) αν Φ(n), τότε Φ(n+1), δηλαδή αν για κάθε $n \geq k+1$ που έχει την ιδιότητα Φ, τότε το n+1 έχει την ιδιότητα Φ.

Τότε Φ(n) για κάθε $n \in \mathbb{N} - \{0,1,...,k\}$, , δηλαδή όλοι οι φυσικοί n, όπου $n \geq k+1$ έχουν την ιδιότητα Φ.

4.4 Αρχή της επαγωγής (2)

Έστω $X \subseteq \mathbb{N}$ και ας υποθέσουμε ότι:

1) $0 \in X$

2) για κάθε $n \in \mathbb{N}: \{0,1,2,...n\} \subseteq X \Rightarrow (n+1) \in X$,

(δηλαδή από το γεγονός ότι όλοι οι αριθμοί $k \leq n$ ανήκουν στο X συνεπάγεται $n+1 \in X$)

Τότε $X = \mathbb{N}$.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής επιτρέπει την χρήση του Λογικού κανόνα Modus Ponens, σύμφωνα με τον οποίο, αν η πρόταση p είναι αληθής και η αλήθεια της πρότασης p συνεπάγεται την αλήθεια της πρότασης q, τότε η q είναι αληθής. Συνεπώς η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι η θεωρητική βάση της αποδεικτικής μεθόδου της τέλειας επαγωγής.

Η θεμελίωση των φυσικών αριθμών με αφετηρία τους πραγματικούς προϋποθέτει την τοποθέτηση των ιδιοτήτων των δύο βασικών πράξεων σε θέση αξιώματος.
(Απειροστικός Λογισμός Ι, Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος & Γιαννακούλιας, 1999, σελ.11-14, 24-27, 32).

Στο εφοδιασμένο με την αλγεβρική δομή του σώματος, και την συνήθη διάταξη, σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, ορίζουμε ως **επαγωγικό** κάθε υποσύνολό του $\mathbb{R}$, έστω Α, που έχει την ιδιότητα: $0 \in \mathrm{A}$, και αν $x \in \mathrm{A}$, τότε $x + 1 \in \mathrm{A}$. Προφανώς το $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικό σύνολο. Θεωρούμε ένα σύνολο $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$ και την μη κενή οικογένεια $\mathrm{A}_\iota = \{\mathrm{A}_i : i \in \mathrm{I}\}$

επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Η τομή $\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ είναι εξ ορισμού το σύνολο των στοιχείων που έχουν την ιδιότητα να ανήκουν σε όλα τα A_i .

4.5 Πρόταση

Η τομή $\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ μιας μη κενής οικογένειας επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, είναι επαγωγικό σύνολο.

Απόδειξη

Αφού κάθε A_i είναι επαγωγικό, το 0 ανήκει σε κάθε A_i άρα $0 \in \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$.

Αν υποθέσουμε πως $x \in \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ τότε $x \in \mathrm{A}_i$ για κάθε $i \in \mathrm{I}$ και εφόσον κάθε A_i είναι επαγωγικό έχουμε ότι $x+1 \in \mathrm{A}_i$ για κάθε $i \in \mathrm{I}$, συνεπώς $x+1 \in \bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$, άρα η τομή $\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ είναι επαγωγικό σύνολο.

Με βάση την παραπάνω πρόταση η τομή όλων των επαγωγικών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ υπάρχει, και είναι το ελάχιστο επαγωγικό του υποσύνολο. Διαισθητικά αυτό το σύνολο ανταποκρίνεται στην έννοια του $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$. Άρα το $\mathbb{N}$ έχει την επαγωγική δυνατότητα: $0 \in \mathbb{N}$ και αν ένας αριθμός $n \in \mathbb{N}$, τότε $n+1 \in \mathbb{N}$.

Το $\mathbb{R}$ διαφοροποιείται από το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών από το γεγονός ότι έχει την ιδιότητα της πληρότητας.

4.6 Ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$

Κάθε μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Η πληρότητα του $\mathbb{R}$ εξασφαλίζει την ύπαρξη όσο το δυνατόν περισσότερων πραγματικών αριθμών, και κατ' επέκταση εμπλέκεται ουσιαστικά σε όλα τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού. Όσον αφορά το $\mathbb{N}$ η πληρότητα του $\mathbb{R}$ έχει σαν συνέπεια την ακόλουθη πρόταση.

4.7 Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδειξη

Έστω ότι το $\mathbb{N} \neq \varnothing$ είναι άνω φραγμένο. Αφού $\mathbb{N} \neq \varnothing$ έχει την ιδιότητα της πληρότητας, άρα υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε το α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Ισχύει α-1<α, οπότε το α-1 δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, συνεπώς υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε α-1<n, δηλαδή α<n+1$\in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο αφού το α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $\mathbb{N}$.

Στο $\mathbb{N}$ ισχύουν οι παρακάτω αρχές, οι οποίες είναι ισοδύναμες, αφού αν δεχθούμε ως διαισθητικά προφανή (αξίωμα) τη μία μπορούμε να αποδείξουμε την άλλη.

4.8 Αρχή του ελαχίστου

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο (στη φυσική του διάταξη, ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$). Δηλαδή για κάθε $X \subseteq \mathbb{N}, X \neq \varnothing$ υπάρχει $n \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $m \in X$ ισχύει $n \leq m$.

Απόδειξη

Έστω $X \subseteq \mathbb{N}, X \neq \varnothing$ χωρίς ελάχιστο στοιχείο. Θεωρούμε το σύνολο S από τους φυσικούς που είναι μικρότεροι από κάθε στοιχείο του X. Αν το $0 \in X$ τότε το X θα είχε ελάχιστο στοιχείο το 0, άτοπο, άρα $0 \notin X$ συνεπώς το 0 είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του X, άρα $0 \in S$. Έστω ότι $n \in S$. Τότε όλα τα στοιχεία του X είναι μεγαλύτερα από το n. Αν $n+1 \in X$ τότε το $n+1$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του X, άτοπο, άρα $n+1 \notin X$, οπότε όλα τα στοιχεία του X είναι μεγαλύτερα του $n+1$, συνεπώς $n+1 \in S$. **Από την αρχή της επαγωγής** έχουμε $S = \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε φυσικός είναι μικρότερος από κάθε στοιχείο του X. Αν ισχύει ότι $X \neq \varnothing$ τότε κάθε στοιχείο του X είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο αφού το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Άρα $X = \varnothing$, άτοπο.

4.9 Απόδειξη αρχής επαγωγής

(Μυτιληναίος & Κατερίνης, 1993, Διακριτά Μαθηματικά σελ. 34-36)

Έστω $X \neq \mathbb{N}$ άρα το $\mathbb{N} - X \neq \varnothing$ οπότε **έχει ελάχιστο στοιχείο**, έστω n_0, με $n_0 \in \mathbb{N} - X$.

Από την ιδιότητα 1) το $0 \in X \Rightarrow 0 \notin \mathbb{N} - X \Rightarrow n_0 > 0 \Rightarrow n_0 = m+1$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Αλλά $m = n_0 - 1 < n_0 \Rightarrow m \notin \mathbb{N} - X \Rightarrow m \in X$ και από την ιδιότητα 2) $m+1 \in X \Rightarrow n_0 \in X$. Αλλά $n_0 \in \mathbb{N} - X$, άτοπο.

5. Διαδικαστική – Εννοιοκεντρική μάθηση

Μελετώντας τις ψυχολογικές παραμέτρους της γνωστικής ανάπτυξης από την σκοπιά του υποκειμένου, παρουσιάστηκε η ανάγκη διερεύνησης του τρόπου με τον οποίο γίνονται αντιληπτές οι μαθηματικές έννοιες.

Η ευρετική κατεύθυνση στην διδασκαλία των μαθηματικών διευρύνει το πεδίο των εννοιών που απαιτείται να χειριστεί ο μαθητής κατά την επίλυση προβλημάτων. Αναδεικνύεται έτσι η ανάγκη μελέτης του τρόπου με τον οποίο γίνονται αντιληπτές οι μαθηματικές έννοιες. Επίσης είναι σε εξέλιξη η ερευνητική δραστηριότητα γύρω από το δίλλημα πολλών εκπαιδευτικών, που αφορά στην εκμάθηση των διαδικασιών στις οποίες εμπλέκονται μαθηματικές έννοιες, σε αντιπαράθεση με την εμβάθυνση στην φύση και την δομή που χαρακτηρίζει τις έννοιες αυτές.

Σύμφωνα με την Anna Sfard οι αφηρημένες έννοιες γίνονται αντιληπτές δομικά (*structurally*) και διαδικαστικά – λειτουργικά (*operationally*). Στην απόκτηση μιας μαθηματικής έννοιας προηγείται η διαδικαστική της σύλληψη και ακολουθεί η δομική, ως ανώτερο στάδιο. Η μετάβαση από την διαδικασία στο δομημένο μαθηματικό αντικείμενο είναι πολύπλοκη και υλοποιείται και τρία στάδια, που αντιστοιχούν σε τρεις βαθμούς δόμησης.

Πρώτα έχουμε το στάδιο της εσωτερίκευσης (*interiorization*), όπου μια διαδικασία εφαρμόζεται σε ήδη γνωστά μαθηματικά αντικείμενα, και συντελλείται (Piaget, 1970, p.14) όταν η διαδικασία περιγράφεται μέσω αναπαραστάσεων. Για παράδειγμα στην περίπτωση των αρνητικών ακεραίων το άτομο έχει την ικανότητα να εκτελεί αφαιρέσεις, ενώ στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών αποκτά ευχέρεια στο χειρισμό τετραγωνικών ριζών.

Η δεύτερη φάση, της συμπύκνωσης (*condensation*), χαρακτηρίζεται από την αυτονόμηση της διαδικασίας από τα μέχρι εκείνη τη στιγμή γνωστά αντικείμενα, και την αναφορά σε αυτήν με όρους εισόδου- εξόδου (*input-output*). Η αυτονόμηση αυτή θα οδηγήσει σε επόμενο στάδιο στην σύλληψη νέων μαθηματικών αντικειμένων. Για παράδειγμα η αφαίρεση ενός φυσικού αριθμού από έναν μικρότερό του οδηγεί στην ιδέα του αρνητικού αριθμού, ενώ η αντιστροφή της διαδικασίας του τετραγωνισμού στον μιγαδικό αριθμό.

Στο στάδιο αυτό τα νέα αντικείμενα αντιμετωπίζονται ως συντομεύσεις (π.χ. $\sqrt{-1}$) των συγκεκριμένων (αυτονομημένων) διαδικασιών και είναι ακόμα στενά συνδεδεμένα με αυτές. Πολλαπλές αναπαραστάσεις χρησιμοποιούνται χωρίς τα νέα αντικείμενα να έχουν ακόμα τον χαρακτήρα πλήρως ορισμένων οντοτήτων.

Η τρίτη φάση, τους πραγμάτωσης (*reification*) (ή της ενθυλάκωσης encapsulation, Tall) προκύπτει κατά την Sfard ως οντολογική αλλαγή και ποιοτικό άλμα. Οι έννοιες θεωρούνται ως πλήρως ανεπτυγμένα αντικείμενα με στατική δομή. Στο παράδειγμα του αρνητικού αριθμού, το τρίτο στάδιο εμφανίζεται όταν το άτομο χειρίζεται την έννοια ως στοιχείο του δακτυλίου των ακεραίων (χωρίς κατ' ανάγκη να είναι γνωστή η τυπική δομή του δακτυλίου). Τους μιγαδικούς το σύμβολο α+βi ερμηνεύεται ως το όνομα του αντικειμένου (στοιχείου ενός καλά ορισμένου συνόλου) και όχι ως περιγραφή μιας διαδικασίας συγκεκριμένων υπολογισμών.

Στα νέα αντικείμενα εφαρμόζονται διαδικασίες που με βάση το παραπάνω σχήμα των τριών σταδίων οδηγούν στη σύλληψη νέων αντικειμένων ανώτερου επιπέδου.

Κατά την Sfard αυτό που συμβαίνει είναι η ταυτόχρονη εμφάνιση του τρίτου σταδίου (*reification*) ενός επιπέδου αφαίρεσης (για παράδειγμα, η θεώρηση τους συνάρτησης ως αντικείμενο) και του πρώτου σταδίου (interiorization) ενός ανώτερου επιπέδου αφαίρεσης (η εκτέλεση διαδικασιών που περιλαμβάνουν συναρτήσεις ως ολοκληρωμένα αντικείμενα). Εμφανίζεται έτσι ένας φαύλος κύκλος που είναι μια από τις πηγές των δυσκολιών που χαρακτηρίζουν την αφαιρετική διάσταση των μαθηματικών. Εξηγεί γιατί για τόσους πολλούς ανθρώπους, « τα μαθηματικά στο σχολείο είναι συλλογή ακατανόητων κανόνων, οι οποίοι αν απομνημονευτούν και εφαρμοστούν σωστά οδηγούν στη σωστή απάντηση» (Skemp, 1971, p.3)

Το θέμα της προτεραιότητας της εκμάθησης των μαθηματικών διαδικασιών σε σχέση με την κατανόηση του πως και γιατί μια διαδικασία λειτουργεί, και τι σημαίνει, απασχολεί έντονα τους ερευνητές τους εκπαίδευσης. Το παραπάνω δίλημμα έχει αναφερθεί πως εκφράζει την αντίθεση μεταξύ **ικανότητας** (proficiency) και **κατανόησης (comprehension)** (Kilpatrick, 1988).

Έχει διατυπωθεί η άποψη από τους συμπεριφοριστές πως οι δεξιότητες πρέπει να μαθαίνονται. Πιο πρόσφατες θεωρίες τείνουν στην αποδοχή της επαναλαμβανόμενης ενασχόλησης των μαθητών με διαδικασίες, μόνο για περαιτέρω βελτίωση ικανοτήτων, που αφορούν τις έννοιες που έχουν ήδη γίνει κατανοητές (Brownell, 1935, p.19).

Σύμφωνα με το μοντέλο της Sfard, τα όρια μεταξύ της ικανότητας εφαρμογής αλγορίθμων και της κατανόησης των αντικειμένων που εμπλέκονται σε αυτές είναι δυσδιάκριτα. Συμβατά με αυτή τη θέση είναι και τα αποτελέσματα μεγάλης έρευνας (Carpenter et. al. 1980), που έδειξαν ότι **η ανάπτυξη της δεξιότητας είναι στενά συνδεδεμένη με την κατανόηση της έννοιας στην οποία αναφέρεται η δεξιότητα αυτή.**

Στη μαθηματική βιβλιογραφία έχει εμφανιστεί πληθώρα *διχοτομιών* που αναφέρονται από φιλοσοφική σκοπιά στα μαθηματικά και από ψυχολογική σκοπιά στη μαθηματική σκέψη. Αναφέρουμε στη συνέχεια μερικές διχοτομίες, (πιο πλήρης κατάλογος στο Hiebert, 1985, pp.1-2).

- Από φιλοσοφική σκοπιά τα μαθηματικά διακρίνονται σε
  - Αφηρημένα (*Abstract*) και Αλγοριθμικά (*Algorithmic*) (Halmos, 1985)
  - Σαφή (*Declarative*) και διαδικαστικά (*Procedural*) (Anderson, 1976)
  - Διαλεκτικά (*Dialectic*) και Αλγοριθμικά (*Algorithmic*) (Henrici, 1974)

- Από ψυχολογική σκοπιά η μαθηματική σκέψη διακρίνεται σε
  - Εικονιστική (*Figurative)* και Λειτουργική *(Operative)* (Piaget, 1970, p.14)
  - Εννοιολογική (*Conceptual*) και διαδικαστική (*Procedural*) (Lesh and Landau, 1983; Hiebert, 1985)
  - Εργαλειακή (*Instrumental)* και Συσχετισμένη (*Relational)* (Skemp, 1976)

Η Sfard θεωρεί πως έχουμε να κάνουμε με **διττότητα** περισσότερο, παρά με διχοτομία. **Η διττή φύση της μαθηματικής σύλληψης αντανακλάται στις διαδικασίες και στα αντικείμενα που αποτελούν τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος.**

Για την μαθηματική επαγωγή ειδικότερα, αναφέρει (Sfard, 1990, p.191) τις δύο διατυπώσεις που αντιστοιχούν στην διαδικαστική και την δομική αντίληψη.

- Για μια ιδιότητα P(n), αν ισχύει η P(1), και P(k)$\Rightarrow$P(k+1) για κάθε k, τότε η P(n) ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.
- Δοθέντος τους συνόλου $S \subseteq \mathbb{N}$, αν $1 \in S$, και $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$ τότε $S = \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση της επαγωγής ακολουθεί την συνολοθεωρητική προσέγγιση, και γενικότερα θεωρεί (ibid, p.33) πως οι οπτικές εικόνες (visual imagery) στοιχειοθετούν την δομική αντίληψη, για παράδειγμα (ibid, pp.5 and 6) το γράφημα μιας συνάρτησης αποκαλύπτει την δομή τους.

Ο διπλός ρόλος του μαθηματικού συμβόλου, ως διαδικασία (process) και ως ιδέα (concept) οδήγησε τους Gray και Tall (1994) στον όρο procept. Πρόκειται για την γνωστική δομή στην οποία, το μαθηματικό σύμβολο λειτουργεί ως σημείο ισορροπίας, με δυνατότητα κίνησης σε δύο κατευθύνσεις γύρω από αυτό. Η μία κατεύθυνση οδηγεί στον υπολογιστικό χειρισμό εννοιών, και η άλλη θεωρεί τις έννοιες ως αυτόνομες οντότητες. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του συμβόλου α+βi που αναφέρθηκε παραπάνω, (Sfard).

Η ικανότητα του ανθρώπου να μετακινείται δημιουργικά από το να «εκτελεί» μια διαδικασία, στο να σκέφτεται μία έννοια, και μάλιστα με τον πλέον «οικονομικό» τρόπο, συμπυκνώνεται στην ύπαρξη των μαθηματικών συμβόλων.

Η καλλιέργεια της ικανότητας αυτής, ιδιαίτερα στους μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων, είναι πολλές φορές ένας στόχος με τον οποίο έρχονται αντιμέτωποι οι δάσκαλοι των μαθηματικών.

5.1 Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων

Η αντίθεση διαδικαστικής και εννοιοκεντρικής σκέψης και κατ' επέκταση μάθησης και διδασκαλίας, έχει γίνει αντικείμενο ερευνών που εστίασαν περισσότερο στην αλληλεπίδραση διδασκόντων - διδασκομένων, και στο κοινωνικό περιβάλλον που συγκροτείται από αυτούς. Ένα παράδειγμα τέτοιας έρευνας τη δεκαετία του 1970 είναι αυτό που οδήγησε τον Guy Brousseau στην ανάπτυξη της θεωρίας των **διδακτικών καταστάσεων**.

Ο Guy Brousseau εισήγαγε και ανέπτυξε την θεωρία των διδακτικών καταστάσεων με σκοπό την ανάδειξη, με φυσικό τρόπο, της μαθηματικής γνώσης ως αναγκαίας για την επίλυση προβλημάτων. Παρατηρεί πως ο αξιωματικός τρόπος παρουσίασης της θεσμοποιημένης μαθηματικής γνώσης κατά την επικοινωνία των επιστημόνων, υιοθετείται και για τις ανάγκες της διδασκαλίας της.

Η αξιωματική παρουσίαση κάνει πιο εύκολη την διδασκαλία, αφού ορίζονται τα αντικείμενα μελέτης και η απόκτηση νέας γνώσης βασίζεται σε ήδη αποκτηθείσες γνώσεις, οπότε αυτό που απομένει είναι η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων και προβλημάτων που η επίλυσή τους απαιτεί την εφαρμογή της νέας γνώσης.

Ο διδακτικός μετασχηματισμός που βασίζεται στο παραπάνω σχήμα, θεωρείται από τον Brousseau χρήσιμος και αναπόφευκτος ακόμα και στην κατασκευή της επιστήμης, και όχι μόνο από διδακτική σκοπιά. Ταυτόχρονα όμως έχει και το χαρακτηριστικό ότι εξαφανίζει τα ίχνη της ιστορικής διαδικασίας, που μέσα από δυσκολίες, λάθη και εφαρμογή διαφόρων τεχνικών, οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα.

Επίσης η μαθηματική κοινότητα κρίνει το αποτέλεσμα, ως προς την εγκυρότητά του στο ευρύτερο δυνατό θεωρητικό πλαίσιο. Χάνονται όμως έτσι τα αφετηριακά ερωτήματα που προκάλεσαν την ενασχόληση και τελικά την παραγωγή μιας νέας γνώσης. Το αναπόφευκτο της αποφυγής των παραπάνω «απωλειών», πηγάζει από την ανάγκη παραγωγής ενός, κατά το δυνατό, αντικειμενικού επιστημονικού κειμένου, και μια τέτοια παραγωγή είναι δυνατή μέσα από διαδικασίες που περιγράφονται ως *αποπροσωποποίηση* και *αποπλαισιοποίηση*.

Ο μαθητής από την πλευρά του πρέπει μερικές φορές να ακολουθήσει παρόμοια με την επιστημονική κοινότητα διαδρομή, αφού η μαθηματική γνώση δεν συνίσταται απλά στην εφαρμογή ορισμών και θεωρημάτων, αλλά στην επίλυση προβλημάτων που κατά τον Brousseau είναι και το έδαφος πάνω στο οποίο «κάνουμε» μαθηματικά. Επιπλέον είναι εξίσου σημαντική με την επίλυση είναι η εύρεση νέων ερωτημάτων, πάντα στο πλαίσιο της ανταλλαγής ιδεών με τα υπόλοιπα μέλη που συγκροτούν το *περιβάλλον* (milieu) της σχολικής τάξης.

Ο δάσκαλος των μαθηματικών πρέπει να φανταστεί και να παρουσιάσει στην τάξη, *καταστάσεις* που να καθιστούν δυνατή την διαδικασία ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης, ως τη μόνη δυνατότητα που οδηγεί στην επίλυση των προβλημάτων που έχουν τεθεί. Για τον σκοπό αυτό ακολουθεί, μέχρι ένα σημείο, αντίθετη κατεύθυνση από αυτή του ερευνητή, αφού η αντικειμενική γνώση πρέπει να γίνει γνώση του μαθητή, δηλαδή να *επαναπροσωποποιηθεί*, και κάθε γνώση πρέπει να συνδεθεί με μια συγκεκριμένη κατάσταση, δηλαδή να *επαναπλαισιοποιηθεί*. Απαιτείται συνεπώς, η προσομοίωση της τάξης ως *επιστημονική μικροκοινότητα*.

Επισημαίνεται, από τον Brousseau πως πρόκειται για προσομοίωση και όχι για αληθινή επιστημονική δραστηριότητα, ακριβώς όπως η αξιωματική παρουσίαση είναι προϊόν διδακτικού μετασχηματισμού της αρχικά παραχθείσας γνώσης, και όχι η γνώση καθαυτή.

Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας προσομοίωσης αποτελεί η πειραματική δραστηριότητα μιας ομάδας ερευνητών του IREM , με την καθοδήγηση του Brousseau, από το 1970 ως το 1973, που ονομάστηκε «ο αγώνας ως το 20» (the race to 20). Με βάση αυτό το παράδειγμα θα γίνει η ταξινόμηση των διδακτικών καταστάσεων σε καταστάσεις δράσης, διατύπωσης και επικύρωσης.

Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων απετέλεσε αντικείμενο μελέτης και έρευνας από την Anna Sierpinska (1999/2002, Lecture Notes on the Theory of Didactical Situations, Concordia university.)
Χρησιμοποιήθηκε η έννοια του παιχνιδιού μεταφορικά, για να διατυπώσει τις υποθέσεις στις οποίες βασίζεται η έννοια της διδακτικής κατάστασης. Συγκεκριμένα αναφέρει:

- *Ο δάσκαλος είναι ένας παίκτης που παρουσιάζει ένα σύστημα που αποτελείται από ένα μαθητή και ένα διδακτικό περιβάλλον.*
- *Ο μαθητής είναι από μόνος του ένας παίκτης ανάμεσα στον εαυτό του και στο διδακτικό περιβάλλον.*
- *Στο παιχνίδι του μαθητή με το διδακτικό περιβάλλον, η γνώση είναι το μέσον της κατανόησης των βασικών κανόνων και στρατηγικών και στη συνέχεια, μέσο επεξεργασίας νικηφόρων στρατηγικών.*
- *Ο σκοπός του δασκάλου είναι να υποχρεώσει το μαθητή σε ένα τέτοιο παιχνίδι, όπου: στοχεύοντας σε μια συγκεκριμένη μαθηματική γνώση, ο δάσκαλος θα προσπαθήσει να ρυθμίσει το σύστημα μαθητή-περιβάλλοντος, με τέτοιο τρόπο, ώστε πράγματι, **αυτή η γνώση να εμφανίζεται ως το καλύτερο διαθέσιμο μέσο για την κατανόηση των κανόνων του παιχνιδιού και της επεξεργασίας νικηφόρων στρατηγικών.***

Από τις παραπάνω υποθέσεις συνάγεται πως η προσέγγιση της διδασκαλίας με την θεωρία των διδακτικών καταστάσεων στοχεύει στην επεξεργασία από τους μαθητές στρατηγικών επίλυσης προβλημάτων και όχι στην αναπαραγωγή λύσεων που παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός από καθέδρας, οπότε συνιστά μετατόπιση από το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Επίσης είναι καθοριστική η έννοια του διδακτικού *περιβάλλοντος* (milieu), ως του «φυσικού» περιβάλλοντος των μαθητών (με την οικολογική ίσως χροιά), και της αλληλεπίδρασης με αυτό. Συνεπώς στην θεωρία των διδακτικών καταστάσεων « η γνώση νοείται ως το αποτέλεσμα των αλληλεπιδράσεων μεταξύ του μαθητή και ειδικού περιβάλλοντος οργανωμένου από το δάσκαλο στο πλαίσιο μιας διδακτικής κατάστασης» (Balacheff)

5.2.1 Ο αγώνας ως το 20» (the race to 20)-Sierpinska

Φάση 1 : Η δασκάλα παρουσιάζει το παιχνίδι στους μαθητές.

Δασκάλα: *Σήμερα θα παίξουμε ένα παιχνίδι με αριθμούς. Το παιχνίδι λέγεται «Αγώνας ως το 20», και παίζεται από δύο παίκτες. Ο ένας παίκτης λέει 1 ή 2, και ο άλλος μπορεί να προσθέσει το 1 ή το 2 στον αριθμό του αντιπάλου και λέει το αποτέλεσμα. Νικητής είναι αυτός που θα πει πρώτος 20. Ποιος προσφέρεται εθελοντικά να παίξουμε το παιχνίδι;*

Στη συνέχεια η δασκάλα ξεκινά στον πίνακα το παιχνίδι με έναν μαθητή και μετά από κάποια βήματα παραχωρεί την θέση της σε ένα άλλο μαθητή.

Φάση 2 : Οι μαθητές παίζουν το παιχνίδι σε ζευγάρια, κρατώντας σημειώσεις του αγώνα σε ένα χαρτί. Αναμένεται να βρουν πως η τύχη δεν είναι η καλύτερη στρατηγική.

Φάση 3 : Τα παιδιά χωρίζονται σε δύο ομάδες και παίζουν το παιχνίδι μέσω ενός αντιπροσώπου που ορίζουν, ο οποίος γράφει στον πίνακα. Ανάμεσα στους γύρους κάθε ομάδα συζητά την στρατηγική της χωρίς να επεμβαίνει στον αντιπρόσωπό της.

Φάση 4 : Παιχνίδι ανακάλυψης. Οι ομάδες διατυπώνουν στρατηγικές, για τις οποίες νομίζουν πως τους επιτρέπουν να κερδίζουν. Αν παρουσιαστεί εμπλοκή στη διαδικασία, οι ομάδες μπορούν να συνεχίσουν το παιχνίδι. Αναμενόταν να ανακαλύψουν ότι νικητής ανακηρύσσεται όποιος πει τους αριθμούς 17,14,11,8,5,2 και να αποδείκνυαν αυτή τους τη δήλωση ξεκινώντας από καθένα από τους παραπάνω αριθμούς.

Από κάποιους μαθητές αναμένει κανείς να αναγνωρίσουν στους νικηφόρους αριθμούς (**του αγώνα για το 20 με βήμα 1 ή 2**) την αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο 17 και διαφορά -3, οπότε να οδηγηθούν στη μορφή **20-3κ**, **κ=1,2,3,4,5,6.**

Στο σημείο αυτό μπορεί να ξεκινήσει μια διαδικασία γενίκευσης με κατάλληλη αλλαγή των κανόνων του παιχνιδιού από τον εκπαιδευτικό. Για παράδειγμα αν το παιχνίδι ήταν «**Ο αγώνας ως το 25**» **με βήμα 1 ή 2,** αναμένεται να καταλήξουν στους αριθμούς 22,19,16,13,10,7,4,1 και στην αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο 22 και διαφορά -3, που οδηγεί στη μορφή **25-3κ, κ=0,1,2,3,4,5,6,7,8.** Αν αλλάξει και το **βήμα σε 1 ή 2 ή 3** έχουμε

νίκη με τους αριθμούς 21,17,13,9,5,1 δηλαδή αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο 21 και διαφορά -4, που οδηγεί στη μορφή **25-4κ, κ=0,1,2,3,4,5,6.**
Στη φάση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί η διαδικασία γενίκευσης με την διατύπωση του γενικού προβλήματος: Ο αγώνας ως το n και τα βήματα 1 ή 2 ή…m, όπου m<n και m,n φυσικοί αριθμοί. Είναι αναμενόμενο κάποιοι μαθητές αυτόνομα και κάποιοι άλλοι με καθοδήγηση να διατυπώσουν την εικασία: Οι νικηφόροι αριθμοί είναι της μορφής **n-(m+1)κ,** όπου κ φυσικός αριθμός. Για τις αποδεκτές τιμές του κ αρκεί να τεθεί ο περιορισμός
n-(m+1)κ > 0, οπότε κ=0,1,2,… έως το ακέραιο μέρος του πηλίκου n προς m+1.

Για την απόδειξη της εικασίας θα προταθεί η μαθηματική επαγωγή. Ανακύπτει όμως το ερώτημα: ως προς ποια παράμετρο θα «τρέξει» η επαγωγή; Τα n,m για κάθε συγκεκριμένο παιχνίδι είναι σταθερά. Οι τιμές της μεταβλητής κ είναι αυτές που δίνουν τους νικηφόρους αριθμούς, οπότε η μαθηματική επαγωγή θα εφαρμοστεί στο κ.

<u>Το βασικό βήμα:</u> Για κ=0, έχουμε **n-(m+1)κ=n,** το n κερδίζει εξ ορισμού.
<u>Το επαγωγικό βήμα:</u> Αν υποθέσουμε πως ο αριθμός **n-(m+1)κ** κερδίζει, θα αποδείξουμε πως και ο αριθμός **n-(m+1)(κ+1)** επίσης κερδίζει.
Έστω πως ένας μαθητής (Α) λέει τον αριθμό n-(m+1)(κ+1), τότε ο «αντίπαλος» (Β) έχει, για κάθε j=1,2,…,m, τις δυνατότητες n-(m+1)(κ+1)+j . Για να αξιοποιηθεί η επαγωγική υπόθεση εμφανίζουμε τον αριθμό **n-(m+1)κ** και έχουμε: **n-(m+1)κ-m-1+j**. Αρκεί τώρα ο μαθητής (Α) να προσθέσει τον αριθμό m+1-j και συνεπώς να πει τον αριθμό **n-(m+1)κ** ο οποίος κερδίζει από την επαγωγική υπόθεση. Απομένει να ελεγχθεί αν ο αριθμός **m+1-j** είναι αποδεκτός, δηλαδή αν είναι φυσικός με τιμές από 1 έως m. Πράγματι αφού

$$1 \le j \le m \Rightarrow -1 \ge -j \ge -m \Rightarrow m \ge m+1-j \ge 1$$

Το οποίο ολοκληρώνει την επαγωγική απόδειξη.

Έτσι ξεκινώντας από ένα απλό πρόβλημα-παιχνίδι οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες ανακάλυψης-συγκρότησης της μαθηματικής πρότασης που δίνει γενική στρατηγική λύσης στο συγκεκριμένο πρόβλημα, υλοποιούν την απόδειξη, και επιπλέον έρχονται σε μια πρώτη επαφή με το ζήτημα της επιλογής της παραμέτρου ως προς την οποία θα εκτελέσουν την απόδειξη, πρόβλημα το οποίο σίγουρα απαιτεί ανώτερου επιπέδου νοητική διεργασία.

Σύμφωνα με την Sierpinska, η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων δημιουργήθηκε για να υπηρετήσει το στόχο της υπέρβασης της αντίθεσης μεταξύ διαδικαστικής (procedural) γνώσης και γνώσης του νοήματος (meaning knowledge). Θεωρεί πως δεν θα ήταν υπερβολή ο ισχυρισμός πως κάθε προσπάθεια θεσμικής παρέμβασης στην εκπαίδευση έχει ως αφετηρία και κεντρικό της σύνθημα, την διδασκαλία με στόχο την κατανόηση σε αντιπαράθεση με την απομνημόνευση, και για τα μαθηματικά, την επίλυση προβλημάτων και την εμβάθυνση στις έννοιες, σε αντίθεση με την στείρα εκτέλεση διαδικασιών με μηχανικό τρόπο.

Στην πράξη όμως, εμφανίζεται ***ταχεία διολίσθηση προς το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας*** . Η θεωρία των διδακτικών καταστάσεων προσπαθεί να μελετήσει τα φαινόμενα εκείνα που είναι υπεύθυνα για την, παρά τις αντίθετες προθέσεις, κυριαρχία τελικά της διδασκαλίας που εστιάζει στην διαδικαστική γνώση. (Sierpinska).

Η διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα, ταχείας διολίσθησης προς το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας. Ενώ προσφέρει στο μαθητή πολλαπλές δυνατότητες να εμβαθύνει στην έννοια της απόδειξης, να καλλιεργήσει τις ευρετικές ικανότητές του, σκεπτόμενος πάνω στις έννοιες που έχει μάθει, και τελικά να γίνει μέρος ενώ πιο μαθητοκεντρικού εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, στην πράξη έχουμε μόνο την εκτέλεση του αλγορίθμου.

6. Η μαθηματική επαγωγή στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου προς τους διδάσκοντες για το κεφάλαιο 4 των Μαθηματικών Κατεύθυνσης Β′ Λυκείου, του σχολικού έτους 2002, αναφέρονται τα εξής: «…..*Εισάγεται η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής για την οποία πρέπει να γίνει κατανοητό ότι η αλήθεια ενός ισχυρισμού Ρ(ν) για ν=1 και η μετάβαση από την αλήθεια του Ρ(ν) στην αλήθεια του Ρ(ν+1) διασφαλίζουν την αλήθεια του ισχυρισμού για κάθε θετικό ακέραιο ν.*» και παρακάτω: «*Με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται η άσκηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία και η κατανόηση της έννοιας του αλγόριθμου. Με την επίλυση των ασκήσεων και των προβλημάτων, αυτού ιδιαίτερα του κεφαλαίου, θα δοθεί η ευκαιρία εξάσκησης των μαθητών: στη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, στην ευθεία απόδειξη, στη μέθοδο της «εις άτοπον απαγωγής», αλλά και σε ευρετικές διαδικασίες οι οποίες απαιτούνται για την επίλυση προβλήματος, που σύμφωνα με τις επικρατούσες απόψεις στη διδακτική των μαθηματικών αποτελεί το πλαίσιο μέσα στο οποίο συντελείται η διδασκαλία και η μάθηση.*»

Παρατηρούμε όμως πως στο σχολικό βιβλίο οι ασκήσεις με διατύπωση προβλήματος είναι μόλις τρεις, και μάλιστα αναφέρονται στην γραμμική διοφαντική εξίσωση για την οποία όμως δίδεται η οδηγία να μην διδαχθεί. Ούτε στις ασκήσεις του Κέντρου Εκπαιδευτικής Έρευνας (ΚΕΕ) υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους απαιτεί όσα έχουν μάθει οι μαθητές στις τρεις πρώτες παραγράφους του κεφαλαίου 4 δηλαδή, μαθηματική επαγωγή, ευκλείδεια διαίρεση και διαιρετότητα. Έτσι οι μαθητές δεν ασκούνται σε ευρετικές διαδικασίες και όποτε ο διδάσκων προσανατολίζεται σε θέματα που τις απαιτούν, συναντά αντιδράσεις, φυσιολογικές εφόσον οι μαθητές διαισθάνονται την μικρή πιθανότητα να έχουν επιτυχία. Έτσι μπορεί να εξηγηθεί σε ένα βαθμό η διολίσθηση στην πεπατημένη της εκτέλεσης διαδικασιών. Το πρόβλημα όμως, ειδικά στην παράγραφο 4.2 είναι πως οι μαθητές έρχονται για πρώτη φορά αντιμέτωποι με ασκήσεις που η επίλυσή τους δεν υποστηρίζεται από ένα ευρύ πλέγμα ορισμών, θεωρημάτων και κανόνων που να τους υποδεικνύουν διαδικασίες, αλλά από τεχνικές που προϋποθέτουν σε βάθος κατανόηση της ευκλείδειας διαίρεσης στο σύνολο των ακεραίων αριθμών.

Θα μπορούσαν στην παράγραφο της Μαθηματικής Επαγωγής που προηγείται, να εμπλακούν σε διδακτικές καταστάσεις που ευνοούν την ανακάλυψη της προς απόδειξη εικασίας, εμβαθύνοντας στην ευκλείδεια διαίρεση. Στην παρούσα εργασία προτείνεται ενδεικτικά ένα σχέδιο μαθήματος προς την κατεύθυνση της κοινής διδασκαλίας των δύο πρώτων παραγράφων. Πρακτικά αυτό είναι εφικτό αφού, η θεωρία που ο διδάσκων είναι υποχρεωμένος να παρουσιάσει απαρτίζεται μόνο από δύο ανεξάρτητες προτάσεις: την αρχή της μαθηματικής επαγωγής και το θεώρημα της ευκλείδειας διαίρεσης.

Αντίθετα η αντιμετώπιση είναι ακραιφνώς διαδικαστική, (με εξαίρεση κάποιες ασκήσεις που προτείνει το ΚΕΕ) η διατύπωση των ασκήσεων μονότονα επαναλαμβάνει: Να αποδείξετε ότι η Ρ(ν) ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο. Ο Τουμάσης (1994) έχει την άποψη πως η επανάληψη στις εκφωνήσεις του «Να αποδείξετε» δεν συνάδει με την εποχή μας όπου διακυρήσσεται η αντιαυταρχική-ενεργητική εκπαίδευση. Από την άλλη μεριά το σχολικό βιβλίο αναδεικνύει τις δυνατότητες του επαγωγικού (ατελούς) συλλογισμού στην εύρεση εικασιών και ταυτόχρονα την ανεπάρκειά του σε εγκυρότητα, με σκοπό να πείσει για την χρησιμότητα της αρχής της μαθηματικής (τέλειας) επαγωγής. Θα μπορούσε ο διδάσκων να αξιοποιήσει τις δυνατότητες που δίνει αυτή η προσέγγιση του σχολικού βιβλίου.

Το αποτέλεσμα είναι οι μαθητές στην παράγραφο της ευκλείδειας διαίρεσης, να αδυνατούν να χειριστούν με επιτυχία θέματα που απαιτούν διάκριση σε άρτιους-περιττούς, και όταν αυτή η διάκριση γίνει «κτήμα» τους, την εφαρμόζουν γενικά σε ασκήσεις που απαιτούν την μορφή της ευκλείδειας διαίρεσης με διαιρέτη διάφορο του 2.

Πιστεύουμε πως μια εξήγηση, μπορεί να βρίσκεται στο γεγονός, ότι πιο εύκολα αντλούν από το οπλοστάσιο της θεωρίας την ισότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, και όχι τον περιορισμό για το υπόλοιπο, που αποτελεί και τον καθοριστικό παράγοντα επίλυσης πολλών ασκήσεων. Το σύμβολο της ισότητας στην ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης, προκύπτει από την διαδικασία εκτέλεσης της πράξης, και υποδεικνύει **πράξεις** που «πρέπει» να υλοποιηθούν, ενώ το σύμβολο της ανισότητας στον περιορισμό για το υπόλοιπο, εμπεριέχει την κατανόηση της **έννοιας** του υπολοίπου.

Στην Γεωμετρία Α΄ λυκείου προτείνεται από το σχολικό βιβλίο μια εργασία ευρετικού χαρακτήρα, για την «ανακάλυψη» του τύπου υπολογισμού του πλήθους των διαγωνίων κυρτού ν-γώνου, ακολουθώντας τον επαγωγικό συλλογισμό στις περιπτώσεις ν=3,4,5,6. Μάλιστα στην συνέχεια διατυπώνεται το βασικό επαγωγικό βήμα, και καθοδηγείται ο μαθητής ώστε να μεταβεί από την υπόθεση – εικασία στις ν πλευρές στην απόδειξη για τις ν+1 πλευρές. Χωρίς να αναφέρεται ρητά γίνεται μια προσπάθεια εισαγωγής της αποδεικτικής μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής, όπως και των άλλων αποδεικτικών μεθόδων (ευθεία απόδειξη , απαγωγή σε άτοπο) που είναι απολύτως απαραίτητη για την υλοποίηση των (διακριτών σε σχέση με το γυμνάσιο) στόχων του αναλυτικού προγράμματος του λυκείου.

Στα Μαθηματικά Γ΄ λυκείου θετικής-τεχνολογικής κατεύθυνσης η απόδειξη του θεωρήματος De Moivre γίνεται με μαθηματική επαγωγή, αλλά τα τελευταία χρόνια η παράγραφος στην οποία βρίσκεται (τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού), είναι εκτός διδακτέας ύλης.

7. Δυσκολίες στην κατανόηση της μαθηματικής επαγωγής

Πολλές ερευνητικές εργασίες έχουν εστιάσει στις πηγές των δυσκολιών που εμφανίζονται στην κατανόηση από τους μαθητές, αποδεικτικών διαδικασιών, και ειδικότερα της μαθηματικής επαγωγής. Αναφέρουμε κωδικοποιημένα τις πιο συχνές από αυτές, (αναλυτική περιγραφή τους έχει καταγραφεί στην διπλωματική εργασία της Μ. Πάλλα , 2006)

1) Η συνύπαρξη παραγωγικής και επαγωγικής διάστασης στον όρο μαθηματική *επαγωγή*.
2) Η σε βάθος κατανόηση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής απαιτεί τη μελέτη των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών.
3) Η έλλειψη κατανόησης της αναγκαιότητας του βασικού ($1^{ου}$) βήματος της μαθηματικής επαγωγής.
4) Η έλλειψη γνώσης του βασικού κανόνα Modus Ponens οδηγεί σε προβλήματα κατά την εφαρμογή του επαγωγικού ($2^{ου}$) βήματος.
5) Οι αλγεβρικοί χειρισμοί κατά την αποδεικτική διαδικασία.
6) Η εμφάνιση των λογικών ποσοδεικτών.
7) Ο περιορισμός των εφαρμογών σε συγκεκριμένου τύπου προβλήματα που αφήνει εκτός μελέτης, για παράδειγμα, την εφαρμογή στην γεωμετρία.

Οι δεξιότητες που πρέπει να διαθέτουν οι μαθητές ώστε να κατασκευάσουν σωστές επαγωγικές αποδείξεις αφορούν εκτός από τα παραπάνω και την ικανότητα να παρουσιάζουν την απόδειξη στην σωστή μορφή. Αυτό φαίνεται από το κατά πόσο μπορούν να την εκφράζουν σωστά, με οποιοδήποτε τρόπο, γραπτό, προφορικό, ή με διάγραμμα. (Ernest, 1984)

Σύμφωνα με τους Avital και Hansen η εμπλοκή των μαθητών με την έννοια της μαθηματικής επαγωγής θα πρέπει να περιλαμβάνει **και** τις τέσσερις φάσεις που ακολουθούν:

α) την χαρά του πειραματισμού με την έννοια

β) την ανάπτυξη της ικανότητας να συγκροτούν εικασίες

γ) τον έλεγχο της εικασίας

δ) την εκτέλεση αποδείξεων με μαθηματική επαγωγή

Τα παραδείγματα που επιλέγουμε, υιοθετώντας το παραπάνω πλαίσιο, θα πρέπει να αντιμετωπίζουν την κάθε φάση ως μέρος που συγκροτεί το σύνολο της έννοιας. Έτσι τα παιδιά όχι μόνο κατανοούν την έννοια, αλλά αποκτούν και εικόνα για το πως δημιουργούνται τα μαθηματικά. (Avital, S. , Hansen, R. , 1976)

Έχουν επίσης εντοπιστεί δυσκολίες σε φοιτητές που θα κληθούν να διδάξουν την μαθηματική επαγωγή στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, οι οποίες αναφέρονται:

α) Στην ουσία του βασικού βήματος της επαγωγικής μεθόδου. Παρατηρήθηκε πως πολλοί φοιτητές δεν γνώριζαν γιατί είναι αναγκαίο, αλλά η μορφή της απόδειξης θεμελίωνε την πίστη τους στην εγκυρότητα της μεθόδου. Αυτό το εύρημα είναι ένδειξη ότι ακολουθούν το τυπικό αποδεικτικό σχήμα (ritual proof scheme), που αναφέρουν οι Harel and Sowder (1998).

β) Στο νόημα, που συνδέεται με το επαγωγικό βήμα, κατά την απόδειξη του συμπεράσματος ότι αν $P(\nu)$ τότε $P(\nu+1)$, για αυθαίρετο ν. Η αναγκαιότητα και των δύο βημάτων για την παραγωγή αληθούς πρότασης με χρήση του modus ponens, δεν είχε κατανοηθεί, με αποτέλεσμα πολλοί φοιτητές να προσπαθούν να αποδείξουν την $P(\nu+1)$ ανεξάρτητα από την $P(\nu)$.

γ) Την δυνατότητα το σύνολο των φυσικών αριθμών για το οποίο αποδείχθηκε (με μαθηματική επαγωγή) μία πρόταση να είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου αληθείας της πρότασης αυτής.

Συγκεκριμένα παρατηρήθηκε πως σε πρόταση που αποδείχθηκε με μαθηματική επαγωγή η αλήθεια της για $\nu \geq 5$, όταν ζητήθηκε να ελεγχθεί η αλήθεια της για $\nu=4$ δεν έγινε έλεγχος (παρότι οι πράξεις ήταν εύκολες), και χαρακτηρίστηκε ψευδής, λόγω της απόδειξης που προηγήθηκε, ενώ ίσχυε και για $\nu=4$. (Stylianides, et.al., ….)

8. Η έρευνα

8.1 Γενικά χαρακτηριστικά

Η συζήτηση που έχει αναπτυχθεί σε πολλές ερευνητικές εργασίες γύρω από την φύση των αποδεικτικών διαδικασιών, και την αλληλεπίδραση που έχουν αυτές με την εμβάθυνση στην φύση των μαθηματικών αντικειμένων, έχει φέρει στο προσκήνιο την αντιπαράθεση μεταξύ διαδικαστικής γνώσης (procedural knowledge) και εννοιολογικής γνώσης (meaning knowledge).

Στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε η ενότητα της μαθηματικής επαγωγής ως το πεδίο εκείνο του αναλυτικού προγράμματος που επιτρέπει, με κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις, την ισόρροπη ανάπτυξη και των δύο κατευθύνσεων, στην προσπάθεια για κατάκτηση, στο μέτρο του δυνατού, ενός μαθηματικού τρόπου σκέψης από τους μαθητές.

Προϋπόθεση γι' αυτό εκτιμούμε πως είναι η εμπλοκή των μαθητών σε διδακτικές καταστάσεις ανακάλυψης της εικασίας που θα αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή ή με όποιο άλλο τρόπο. Πιστεύουμε πως με αυτόν τον τρόπο θα εμβαθύνει ο μαθητής στις έννοιες που μελετά, θα τις χειριστεί διαδικαστικά καλύτερα, και κυρίως σταθερότερα σε βάθος χρόνου.

Το δείγμα των δεκαεννιά μαθητών, απαρτίστηκε από ένα τμήμα επτά μαθητών θετικής, ένα τμήμα τεσσάρων μαθητών τεχνολογικής και ένα τμήμα οκτώ μαθητών επίσης τεχνολογικής κατεύθυνσης Β' λυκείου, σε φροντιστήριο της Δάφνης, Αττικής. Το μέγεθος είναι φυσικά πολύ μικρό για γενικευμένα συμπεράσματα, αλλά παρόλα αυτά συνέβαλλε στην καταγραφή τάσεων που μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενα περαιτέρω έρευνας.

Στους έντεκα μαθητές διδάσκοντας ήταν ο ερευνητής και στους οκτώ άλλος συνάδελφος. Το ερωτηματολόγιο δόθηκε την περίοδο των επαναληπτικών μαθημάτων, ένα μήνα πριν τις εξετάσεις. Αυτό το γεγονός συνέβαλλε αρνητικά στο μέγεθος του δείγματος, αφού πολλοί μαθητές δεν συμμετείχαν στην διαδικασία διότι είχαν ήδη πληροφορηθεί πως η μαθηματική επαγωγή δεν συμπεριλαμβάνεται στην εξεταστέα ύλη.

Ο ευρετικός χαρακτήρας μεγάλου μέρους του ερωτηματολογίου δεν υποστηρίχθηκε από προηγούμενη εξάσκηση και διδασκαλία, ουσιαστικά οι μαθητές ήλθαν σε επαφή με αυτήν την προσέγγιση για πρώτη φορά. Η χρονική διάρκεια ήταν πενήντα λεπτά, στα οποία ο διδάσκοντας δεν πλησίασε τα θρανία, και δεν βοήθησε με οποιοδήποτε τρόπο τους μαθητές, πλην μιας αναγκαίας διευκρίνισης που έδωσε την τελική μορφή στο ερωτηματολόγιο.

Ο χώρος του φροντιστηρίου λειτούργησε θετικά στην αρχή, ως προς την έλλειψη του άγχους της βαθμολόγησης, (τους τονίστηκε παρόλα αυτά η δυνατότητα ανώνυμης συμμετοχής). Όσο περνούσε ο χρόνος και εμφανίζονταν δυσκολίες στην αντιμετώπιση των ερωτήσεων, σε αρκετούς μαθητές λειτούργησε αρνητικά, (ως προς την ένταση των προσπαθειών τους), η εξ ορισμού κατεύθυνση του χώρου, στην εξεταστική επιτυχία.

Σε μια προσπάθεια ποιοτικής ανάλυσης των αποτελεσμάτων, αλλά και ανατροφοδότησης των συμμετεχόντων με στοιχεία που μπορεί να βοηθήσουν την γνωστική τους ανάπτυξη, κρίθηκε αναγκαία η διαδικασία των συνεντεύξεων. Διενεργήθηκαν δέκα συνεντεύξεις σε μαθητές, διάρκειας τριάντα περίπου λεπτών η καθεμία, με ερωτήσεις προσαρμοσμένες στο γραπτό τους. Στην διαδικασία των συνεντεύξεων εντάχθηκε και σύντομη διδασκαλία, ειδικά στο τελευταίο ερώτημα.

Στην πορεία της έρευνας κρίθηκε χρήσιμη η επέκταση της μελέτης σε φοιτητές του Μαθηματικού τμήματος της Αθήνας, ώστε να γίνουν κάποιες συγκρίσεις που αφορούν την σταθερότητα των γνώσεων που αποκτώνται στο λύκειο και μάλιστα σε έναν πληθυσμό υποψηφίων διδασκόντων του γνωστικού αντικειμένου. Συμμετείχαν τριάντα δύο φοιτητές που παρακολούθησαν το μάθημα επιλογής Διδακτική ΙΙ, στους οποίους τονίστηκε η μη βαθμολογική επίδραση της επίδοσής τους και η δυνατότητα ανώνυμης συμμετοχής τους στην έρευνα. Η χρονική διάρκεια ήταν πενήντα λεπτά, και δεν υπήρξε ανάγκη παροχής διευκρινήσεων, αφού το ερωτηματολόγιο είχε την τελική του μορφή μετά και την εμπειρία εφαρμογής του στους μαθητές. Διεξήχθει προς το τέλος του εξαμήνου.

8.2 Σκοποί της έρευνας

Βασικός σκοπός της έρευνας είναι να εντοπίσει τις δυνατότητες των μαθητών στην διατύπωση εικασιών σε αριθμητικά προβλήματα, γενικεύοντας επιμέρους παρατηρήσεις, καθώς και το αν συνειδητοποιούν την ανάγκη απόδειξης αυτών των εικασιών.

Επίσης εξετάζεται η πιθανή σύνδεση της διατύπωσης, από τους μαθητές, της αρχής της μαθηματικής επαγωγής με την εφαρμογή του αλγόριθμου της επαγωγικής απόδειξης.

Τέλος ενδιαφέρει ο τρόπος αντίδρασης των μαθητών, όταν τους ζητείται να αντιμετωπίσουν απλά γεωμετρικά προβλήματα με την βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

Οι σκοποί αυτοί τίθενται με συνεκτίμηση του δεδομένου ότι δεν έχει προηγηθεί διδακτική παρέμβαση σε άλλη κατεύθυνση, πλην της εξάσκησης στην εκτέλεση του αλγόριθμου της μαθηματικής επαγωγής.

8.3 Τα ερευνητικά ερωτήματα

Οι παραπάνω σκοποί εντάσσονται στον γενικότερο προβληματισμό που εστιάζει στην αντίθεση μεταξύ της γνώσης διαδικασιών και της γνώσης του νοήματος, αλλά και στην πιθανή αλληλεπίδρασή τους. Σε αυτό το πλαίσιο τίθενται ερωτήματα όπως:

- Συνδέεται η σωστή εφαρμογή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής με την διατύπωσή της με ακρίβεια και σαφήνεια;
- Μπορούν οι μαθητές (και οι φοιτητές) να κατασκευάζουν γενικές εικασίες, από ειδικές περιπτώσεις, δηλαδή με επαγωγικό συλλογισμό;
- Κατανοούν την ανάγκη απόδειξης των εικασιών;
- Μπορούν να εφαρμόσουν μαθηματική επαγωγή σε γεωμετρικά προβλήματα;

8.4 Το ερωτηματολόγιο

1) Ποια είναι η διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής;

2) Να αποδείξετε ότι $1+2+3+4+\ldots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, όπου ν θετικός ακέραιος.

3) Αφού γράψετε στην μορφή ενός κλάσματος καθέναν από τους τρεις αριθμούς: $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$ και $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$, μπορείτε να διατυπώσετε μια εικασία (υπόθεση) για το άθροισμα:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}$, όπου ν θετικός ακέραιος;

4) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2007\cdot 2008}$.

5) Γνωρίζουμε πως ν σημεία του επιπέδου, όπου ν>2, ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζουν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ευθείες.

Υπάρχουν δύο αποδείξεις της παραπάνω πρότασης.

Μπορείτε να την αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή;
Ποια είναι η άλλη απόδειξη;
Ποια θεωρείτε καλύτερη;

8.5 Ανάλυση των αποτελεσμάτων

ΕΡΩΤΗΣΗ 1

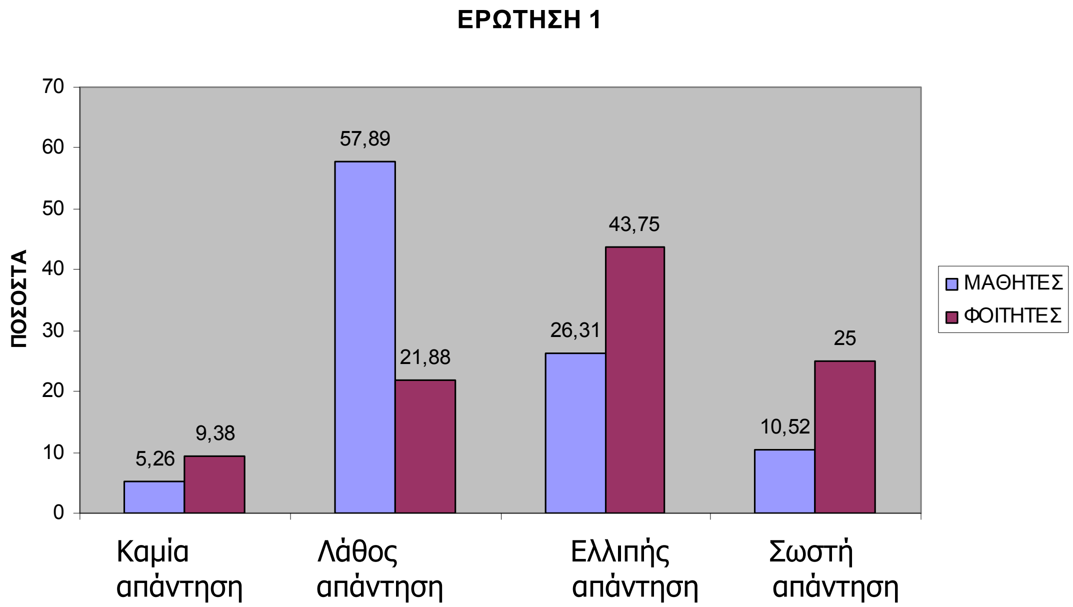
Ποια είναι η διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής;

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ: 0-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ Μ:1/19=5,26% Φ: 3/32=9,38%

1-ΛΑΘΟΣ Μ:11/19=57,89% Φ: 7/32=21,88%

2-ΕΛΛΙΠΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μ:5/19=26,31% Φ: 14/32=43,75%

3-ΣΩΣΤΟ Μ:2/19=10,52% Φ: 8/32=25%



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Σε όλες σχεδόν τις απαντήσεις, μαθητών και φοιτητών, είναι εμφανής η διαδικαστική προσέγγιση (operational, κατά Sfard) στην προσπάθειά τους να διατυπώσουν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Αυτό φαίνεται από την υπερβολική χρήση ρημάτων σε πρώτο πληθυντικό πρόσωπο, και την οργάνωση του κειμένου τους σε βήματα, που οδηγεί στη συγκρότηση μιας τελείως αλγοριθμικής διατύπωσης.

Είναι χαρακτηριστικό πως σε πολλούς κάθε ενέργεια ορίζει και ένα βήμα, έτσι προκύπτουν τρία βήματα, αντί για τα δύο που συγκροτούν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής. Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι η θεμελιώδης ιδιότητα των φυσικών αριθμών, η οποία νομιμοποιεί, καθιστά έγκυρη και αποδεικτικά αξιόπιστη την αλγοριθμική διαδικασία. Η διάκριση αρχής-μεθόδου, απαιτεί μελέτη της δομής του συνόλου των φυσικών αριθμών, και της αξιωματικής του θεμελίωσης, κάτι που βρίσκεται εκτός του πεδίου στόχων του αναλυτικού προγράμματος στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Βέβαια το σχολικό βιβλίο αναφέρεται στην διάκριση αρχής-μεθόδου, αλλά όλη η αντιμετώπιση που ακολουθεί υλοποιεί τον στόχο που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Το αποτέλεσμα είναι οι μαθητές να προσαρμόζουν την θεωρία στο πλαίσιο της εφαρμογής της, να θεωρητικοποιούν δηλαδή την αλγοριθμική διαδικασία.

Από τους φοιτητές όμως που εμβαθύνουν στις δομές των συνόλων και στην αξιωματική θεμελίωση θα ήταν ίσως αναμενόμενη μια αντιμετώπιση, η οποία θα τους διαφοροποιούσε από τους μαθητές. Αντίθετα, φαίνεται πως η «αδράνεια» της σχολικής διαδικαστικής προσέγγισης είναι αρκετά ισχυρή και παρούσα, αρκετά χρόνια μετά την αποφοίτηση από το λύκειο και παρά την αλλαγή φιλοσοφίας στο πανεπιστήμιο.

2) Σε ελάχιστες απαντήσεις μαθητών και φοιτητών γίνεται σαφές πως η αρχή της μαθηματικής επαγωγής αφορά τους φυσικούς αριθμούς. Μάλλον η αναφορά στους φυσικούς θεωρείται περιττή ως προφανής, άλλωστε όπως θα δείξουν και οι απαντήσεις στις επόμενες ερωτήσεις η έλλειψή της δεν επηρεάζει την εφαρμογή της μεθόδου, τουλάχιστον στα μη γεωμετρικά προβλήματα.

Στους μαθητές ειδικότερα, η ύπαρξη σε άσκηση, του συμβόλου «ν» σε συνδυασμό με το «για κάθε» φαίνεται να αρκεί ώστε να κατευθύνουν τη σκέψη τους στην εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής. Βλέπουν ότι χειρίζονται φυσικούς αριθμούς, αλλά δεν το αναφέρουν στην διατύπωση της αρχής.

3) Όσον αφορά το είδος των ζητημάτων που αντιμετωπίζονται με μαθηματική επαγωγή, είναι σαφής η επίδραση που έχει στους μαθητές το περιεχόμενο των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου που περιλαμβάνει μόνο ισότητες και ανισότητες. Πολλοί μαθητές λοιπόν αφού έχουν ταυτίσει την αρχή της μαθηματικής επαγωγής με την μέθοδο θεωρούν αναγκαία την ένταξη στην διατύπωση, του πεδίου προβλημάτων που αντιμετωπίζονται με αυτή τη μέθοδο.

4) Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημανθεί πως στα πλαίσια και της παρούσας έρευνας εμφανίστηκε σύγχυση στους μαθητές γύρω από τις έννοιες, μεταβλητή, άγνωστος, παράμετρος. Η δυσκολία στην διάκριση και διαφοροποίηση των εννοιών αυτών οδήγησε στην χρήση του ζεύγους εξίσωση – ανίσωση, αντί για ισότητα – ανισότητα. Οι φοιτητές αντίθετα χρησιμοποίησαν πιο γενικές μαθηματικές έννοιες όπως: ισχυρισμός, πρόταση, σχέση, ιδιότητα. Γεγονός που κρίνεται αναμενόμενο λόγω του ευρύτερου πεδίου ζητημάτων που αντιμετωπίζουν.

5) Το πρόβλημα της σωστής έκφρασης στον γραπτό λόγο εμφανίστηκε κυρίως στους μαθητές. Υπήρξαν διατυπώσεις οι οποίες εκτός του ότι ήταν λανθασμένες από μαθηματική σκοπιά, στερούνταν και συντακτικής ορθότητας. Πολλές φορές οι μαθητές στον προφορικό λόγο δυσκολεύονται να διατυπώσουν ορθά μια μαθηματική πρόταση και όταν ο εκπαιδευτικός τους διορθώνει απαντούν: «αυτό ήθελα να πω».
Στις ασκήσεις δεν γίνεται εμφανές το πρόβλημα, αφού εκτελούν διαδικασίες, πολλές φορές μηχανικά. Στις θεωρητικές διατυπώσεις όμως, παρουσιάζεται ανεπάρκεια εκφραστικής ικανότητας, η οποία δεν τους αποτρέπει από το να απαντήσουν, λόγω του άγραφου νόμου (διδακτικό συμβόλαιο) που επιβάλλει στο μαθητή να δώσει μια οποιαδήποτε απάντηση, θεωρώντας αυτή την τακτική καλύτερη από το να μην απαντήσει καθόλου.

6) Οι περισσότερες λανθασμένες ή ελλιπείς απαντήσεις εστιάζουν στο πέρασμα της εγκυρότητας ενός ισχυρισμού από τον ν στον ν+1, αγνοώντας τον έλεγχο για τον αριθμό που σηματοδοτεί την εκκίνηση της απόδειξης. Στις επόμενες ερωτήσεις δεν εμφανίστηκε παρόμοια έλλειψη. Αν και η εξήγηση του φαινομένου απαιτεί περαιτέρω έρευνα σε μεγαλύτερους και δειγματοληπτικά αρτιότερους πληθυσμούς, μπορεί να διατυπωθεί η **υπόθεση** πως ενώ το αρχικό στάδιο είναι πολλές φορές διαδικαστικά ευκολότερο από το τελικό, η συνειδητοποίηση της αναγκαιότητάς του που οδηγεί και στην θεωρητική του διατύπωση, απαιτεί κατανόηση σε βάθος των ιδιοτήτων των φυσικών αριθμών.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2

Να αποδείξετε ότι $1+2+3+4+...+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$**, όπου ν θετικός ακέραιος.**

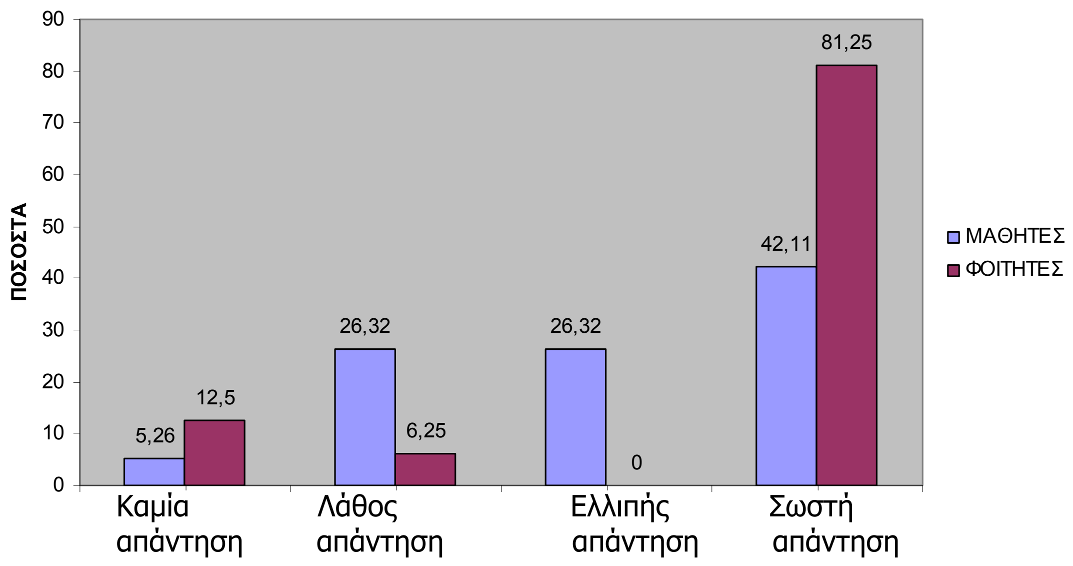
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ: 0-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ Μ: 1/19=5,26% Φ:4/32=12,5%

1-ΛΑΘΟΣ Μ: 5/19=26,32% Φ:2/32=6,25%

2-ΕΛΛΙΠΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μ: 5/19=26,32% Φ:0 /32=0%

3-ΣΩΣΤΟ Μ: 8/19=42,11% Φ:26/32=81,25%

ΕΡΩΤΗΣΗ 2



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Η εφαρμογή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής δείχνει να παρουσιάζει σαφώς μικρότερες δυσκολίες (στους μαθητές και κυρίως στους φοιτητές) από την θεωρητική της διατύπωση. Συγκεκριμένα 11 στους 19 μαθητές και 18 στους 32 φοιτητές βελτίωσαν την επίδοσή τους, ενώ 6 στους 19 μαθητές και 11 στους 32 φοιτητές παρουσίασαν ίδια επίδοση με την ερώτηση 1. Η αλγοριθμική διατύπωση της αρχής φαίνεται να είχε μεγάλη επίδραση στην άμεση και επιτυχή εφαρμογή της από τους περισσότερους μαθητές και φοιτητές.

2) Τα λάθη των μαθητών ήταν αλγεβρικού χαρακτήρα, λάθη στις αριθμητικές πράξεις (πολλά από αυτά μη αναμενόμενα για την ηλικία τους) που τους εμπόδισαν να εφαρμόσουν ένα γενικά σωστό σκεπτικό. Κυρίως όμως εμφανίστηκε αδυναμία χειρισμού του αθροίσματος. $1+2+3+4+\ldots+\nu$. Χαρακτηριστικά αναφέρονται τα εξής:

α) $1+2+3+4+\ldots+\nu+\nu+1=1+2+3+4+\ldots+2\nu+1$ οπότε στη συνέχεια δεν μπορεί να εφαρμόσει την επαγωγική υπόθεση, και

β) για ν=1 έχουμε: $1+2+3+4+\ldots+1$. **Φαίνεται να αντιλαμβάνεται και να χειρίζεται το άθροισμα ως γενικό όρο ακολουθίας και κατά συνέπεια το ν ως μεταβλητή.**

Ουσιαστικά το άθροισμα $1+2+3+4+\ldots+\nu$ είναι ίσο με $s_\nu=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa$, δηλαδή η μεταβλητή ν καθορίζει το πλήθος των όρων του αθροίσματος. Πρόκειται λοιπόν για λεπτές έννοιες που είναι λογικό να προκαλούν δυσκολίες στους μαθητές. Βέβαια πρέπει να αναφερθεί πως στην Άλγεβρα Β′ λυκείου εμφανίζονται τέτοια αθροίσματα, αλλά ο χειρισμός τους απαιτεί κυρίως εφαρμογή γνωστών τύπων, ενώ στο αντικείμενο που μελετούμε απαιτείται ουσιαστικά εξοικείωση με μερικά αθροίσματα ακολουθιών.

Τέλος αν και εμφανίστηκε μόνο σε μία περίπτωση αξίζει να αναφερθεί πως η εξαιρετικά «λιτή» διατύπωση του αλγόριθμου (αγνόησε τον έλεγχο για ν=1, δεν διατύπωσε την ισότητα για ν+1) είχε ως αποτέλεσμα η εφαρμογή της επαγωγικής υπόθεσης, καθώς και η εκτέλεση πράξεων στον έλεγχο της Ρ(ν+1) να οδηγήσει στο **σωστό αποτέλεσμα (**$\frac{(\nu+2)(\nu+1)}{2}$**), αλλά αυτό να μην είναι αναγνωρίσιμο ως το ζητούμενο.** Με εκτέλεση πράξεων καταλήγει στο $\frac{\nu^2+3\nu+2}{2}$ οπότε έχοντας αποκλίνει από την σωστή πορεία σταματά εκεί αδυνατώντας να εξάγει συμπέρασμα.

3) Στους φοιτητές δεν εμφανίστηκαν ελλιπείς απαντήσεις αφού, στους 6 που δεν απάντησαν σωστά οι 4 δεν απάντησαν καθόλου, και οι 2 δεν χειρίστηκαν σωστά το άθροισμα $1+2+3+4+\ldots+\nu$ παρά την μεγαλύτερη τριβή τους με ακολουθίες και σειρές. Συγκεκριμένα εμφανίστηκε το λάθος της περίπτωσης α) που αναφέρθηκε παραπάνω,

καθώς και το εξής: $1+2+3+4+\ldots+\nu+1=1+\frac{\nu(\nu+1)}{2}$

Ουσιαστικά δηλαδή:

$$\alpha_{\nu+1}=\sum_{\kappa=1}^{\nu+1}\kappa=1+2+3+4+\ldots+(\nu+1)=1+2+3+4+\ldots+\nu+1=1+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa=1+\alpha_\nu$$

ΕΡΩΤΗΣΗ 3

Αφού γράψετε στην μορφή ενός κλάσματος καθέναν από τους τρεις αριθμούς: $\frac{1}{1\cdot 2}$ **,** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$ **και** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$ **, μπορείτε να διατυπώσετε μια εικασία (υπόθεση) για το άθροισμα:**

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}$ **, όπου ν θετικός ακέραιος;**

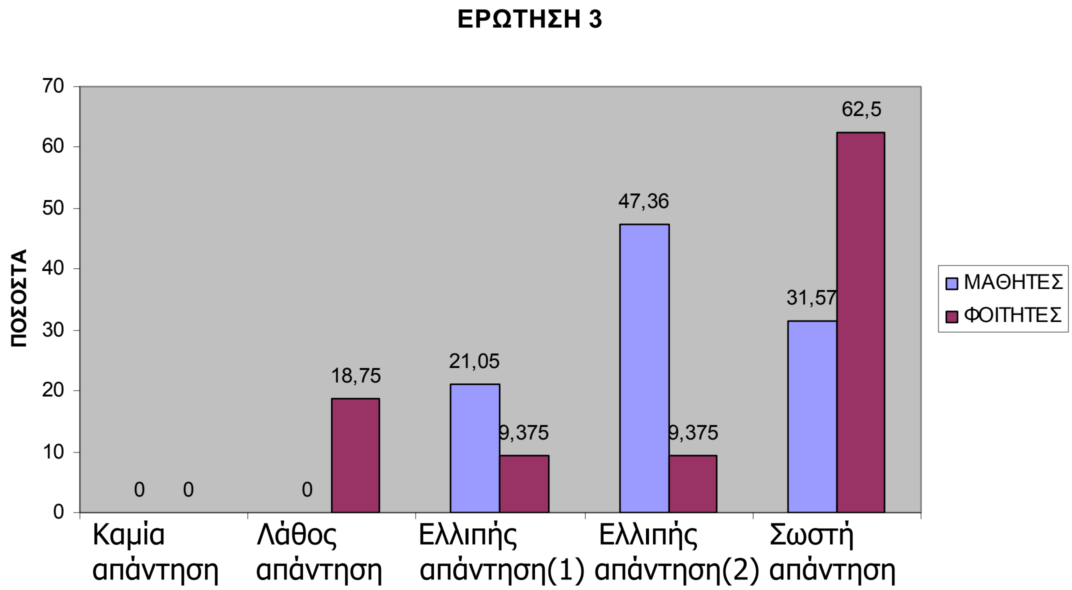
ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ: 0-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ Μ:0/19=0% Φ:0/32=0%

1-ΛΑΘΟΣ Μ:0/19=0% Φ:6/32=18,75%

2-ΕΛΛΙΠΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μ:4/19=21,05% Φ:3/32=9,375%

3-ΕΛΛΙΠΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μ:9/19=47,36% Φ:3/32=9,375%

4-ΣΩΣΤΟ Μ:6/19=31,57% Φ:20/32=62,5%



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Στην ερώτηση 3 διαχωρίστηκαν οι ελλιπείς απαντήσεις σε αυτές που υπολογίστηκαν απλώς τα κλάσματα χωρίς αυτό να συνδυάζεται από κάποια προσπάθεια στην κατεύθυνση εύρεσης της σωστής εικασίας, και σε αυτές που υπήρξε προσπάθεια χωρίς αποτέλεσμα**. Απάντησαν όλοι, μαθητές και φοιτητές, γεγονός που δείχνει κάποια ανταπόκριση σε κάτι διαφορετικό, που ξεφεύγει από την απλή εκτέλεση αλγορίθμων,** παρά το πολύ εύκολο πρώτο μέρος της ερώτησης.

Θα πρέπει να αναφερθεί πως η αρχική διατύπωση της ερώτησης δεν περιείχε την έκφραση «**Αφού γράψετε στην μορφή ενός κλάσματος καθέναν από τους τρεις αριθμούς:…»,** άλλα «**Αφού γράψετε στην μορφή ενός κλάσματος τους αριθμούς:…».** Η αρχική έκφραση προκάλεσε ερωτήσεις πολλών μαθητών ως προς τι ζητάει ακριβώς η ερώτηση, προς έκπληξη του ερευνητή που θεώρησε σαφές πως πρόκειται για τρεις αριθμούς και φυσικά ένα κλάσμα έχει δύο όρους (αριθμητή, παρονομαστή) και όχι τρεις. Δόθηκε η διευκρίνιση πως κλάσμα εννοούμε την μορφή μ/ν, $\nu \neq 0$, μ,ν ακέραιοι αριθμοί, και η διατύπωση έγινε όπως αναφέρεται παραπάνω.

Επίσης θα πρέπει να αναφερθεί πως ακολουθήθηκε διαφορετικό κριτήριο αξιολόγησης στους φοιτητές και ως εκ τούτου δεν είναι συγκρίσιμα τα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα στους φοιτητές χαρακτηρίστηκαν ως λάθος οι απαντήσεις στις οποίες υπολογίστηκαν μεν τα κλάσματα, αλλά στη συνέχεια υπήρξαν σοβαρά λάθη ακόμη και σε απλές πράξεις.

2) Όσοι μαθητές έκαναν κάποια προσπάθεια να εντοπίσουν την εικασία αλλά δεν κινήθηκαν στη σωστή κατεύθυνση, **κατά την μετατροπή των αριθμών σε κλασματική μορφή δεν κατέληξαν σε ανάγωγο κλάσμα, με συνέπεια να είναι όντως πιο δύσκολο να προχωρήσουν.** Το γεγονός αυτό δεν αναμενόταν, και ήταν σαφής ένδειξη πως, αφενός οι μαθητές δεν σκέφτονται με τον τρόπο των διδασκόντων, και αφετέρου, **η ευρετική πορεία προς τη σωστή εικασία ενδέχεται να παρεκκλίνει εξαιτίας της απουσίας μιας απλής κίνησης,** όπως η απλοποίηση κλασμάτων στην περίπτωση που εξετάζουμε.

3) Χρειάζεται να προσανατολιστεί η διδασκαλία και προς την κατεύθυνση της εμπλοκής με ευρετικές τεχνικές, ώστε να ενισχυθεί η αυτενέργεια των μαθητών και η εμπιστοσύνη στις δυνατότητές τους ακόμα και όταν χρειάζεται να «βαδίσουν στα τυφλά». Από την άλλη μεριά 4 στους 6 μαθητές **που βρήκαν την εικασία δεν είχαν επίσης απλοποιήσει τα κλάσματα,** που σημαίνει πως δεν ήταν μεν καθοριστικό βήμα αλλά, πρέπει να ληφθεί υπόψη πως οι μαθητές αυτοί είχαν συνολικά πολύ καλύτερη επίδοση από τους υπόλοιπους. Δύο μαθητές υπέθεσαν σωστά μερικά από τα επόμενα κλάσματα χωρίς όμως να γενικεύσουν, ενώ **ένας έκανε προσπάθεια γενίκευσης, εντοπίζοντας την ακολουθία των αριθμητών και των παρονομαστών ξεχωριστά, με συνέπεια να φτάσει σε αναδρομικού χαρακτήρα τύπο ο οποίος δεν υπολογίζει το γενικό άθροισμα.**

4) Αν και αρκετοί μαθητές προβληματίστηκαν, κανείς (σωστά αφού η ερώτηση δεν το απαιτούσε) δεν προχώρησε σε προσπάθεια απόδειξης της εικασίας που διατύπωσε, ενώ 2 στους 20 φοιτητές που βρήκαν την εικασία την απέδειξαν χωρίς να απαιτείται. Δεν απαιτήθηκε απόδειξη με στόχο να εστιάσουν στην προσπάθεια εύρεσης της εικασίας, να μην χαθεί χρόνος, και να γίνει αντιπαραβολή με την ερώτηση 4 που απαιτεί απόδειξη.

5) Οι φοιτητές που βρήκαν την εικασία απλοποίησαν τα κλάσματα, ενώ όσοι δεν τα απλοποίησαν δεν τη βρήκαν πλην ενός. **Εντύπωση προκάλεσε το γεγονός της εμφάνισης σοβαρών λαθών** (στους φοιτητές) που οδήγησε σε πιο αυστηρή αξιολόγηση όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Συγκεκριμένα : α) εμφανίστηκαν **λάθος προσθέσεις κλασμάτων** (τρεις), β) παρατηρήθηκε πως οι όροι του αθροίσματος είναι όροι αριθμητικής προόδου (ένας), γ) γράφτηκε απλώς το άθροισμα στη «Σ» μορφή (ένας), δ) έγινε γενίκευση δίνοντας στο ν διαφορετικές τιμές στην ίδια παράσταση (ένας).

ΕΡΩΤΗΣΗ 4

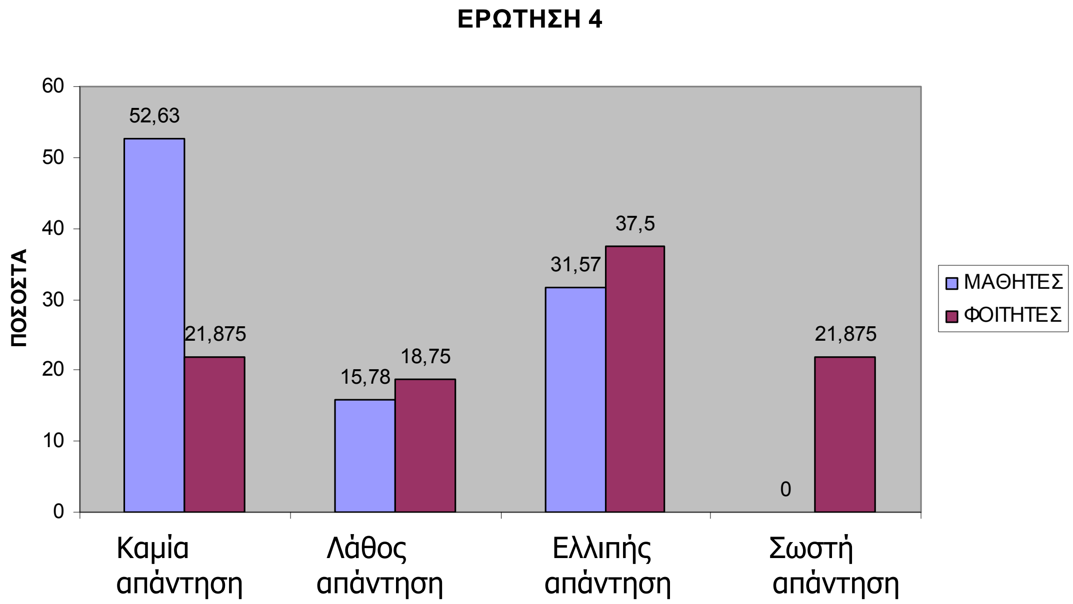
Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2007\cdot 2008}$.

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ: 0-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ Μ:10/19=52,63% Φ:7/32=21,875%

1-ΛΑΘΟΣ Μ:3/19=15,78% Φ:6/32=18,75%

2-ΕΛΛΙΠΗΣ Μ: 6/19=31,57% Φ :ΑΠΑΝΤΗΣΗ 12/32=37,5%

3-ΣΩΣΤΟ 0/19=0% Φ:7/32=21,875%



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Κανείς μαθητής από όσους είχαν διατυπώσει την σωστή εικασία στην ερώτηση 3 δεν την απέδειξε στην ερώτηση 4 πριν δώσει την σωστή απάντηση. **Αρκετοί προβληματίστηκαν αν η λέξη «υπολογίσετε» σημαίνει «αποδείξετε»** αλλά τελικά δεν προχώρησαν σε απόδειξη. Από τις συνεντεύξεις φάνηκε πως αν και δεν έγινε απόδειξη στην ερώτηση 4, οι μαθητές που βρήκαν την εικασία, **διαισθάνονταν την αναγκαιότητα της απόδειξης, αλλά δεν μπόρεσαν να τη βρουν. Φαίνεται πως οι λέξεις εικασία και υπόθεση, του ερωτήματος 3 λειτούργησαν προς αυτή την κατεύθυνση.**

2) Επίσης 12 στους 32 φοιτητές έδωσαν σωστή απάντηση χωρίς απόδειξη και 6 στους 32 έκαναν λάθη που ήταν συνέπειες των αντίστοιχων στην ερώτηση 3. Κάποιοι φοιτητές επίσης προσπάθησαν να αντιμετωπίσουν το θέμα με χρήση του ν! και κατέληξαν σε αδιέξοδο. Οι μαθητές που ακολούθησαν λάθος κατεύθυνση θεώρησαν αριθμητική πρόοδο εκεί που δεν υφίσταται, και παρασύρθηκαν και αυτοί από την λάθος απάντησή τους στην ερώτηση 3, όπως ήταν άλλωστε αναμενόμενο από την δομή του ερωτηματολογίου.

3) Υπήρξε προβληματισμός κατά την συγκρότηση του ερωτηματολογίου, αν θα έπρεπε η διατύπωση να ήταν: «Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2007\cdot 2008}=\frac{2007}{2008}$». Αυτή η διατύπωση όμως θα λειτουργούσε ως υπόδειξη για την ερώτηση 3, η οποία είχε σκοπό να διερευνήσει την ευρετική ικανότητα χωρίς καμία περαιτέρω πληροφορία, πλην της κατεύθυνσης προς τον επαγωγικό συλλογισμό. Άλλωστε πιστεύουμε πως η ανάγκη της απόδειξης δεν θα πρέπει να προκύπτει μόνο από την σαφή απαίτηση στην διατύπωση κάθε άσκησης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5

Γνωρίζουμε πως ν σημεία του επιπέδου, όπου ν>2, ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζουν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ευθείες.

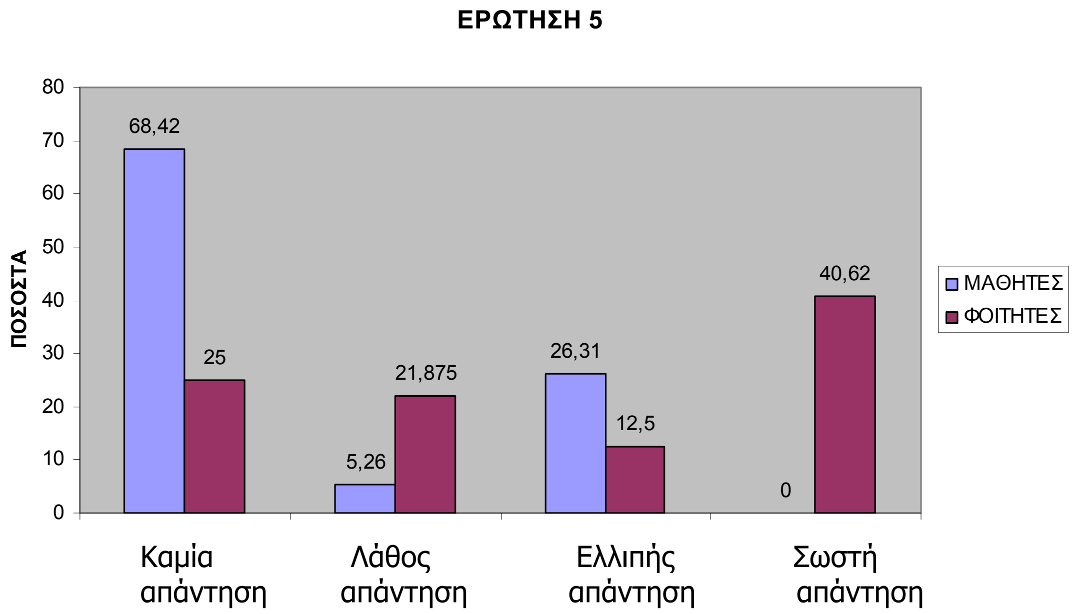
Υπάρχουν δύο αποδείξεις της παραπάνω πρότασης.

Μπορείτε να την αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή;
Ποια είναι η άλλη απόδειξη;
Ποια θεωρείτε καλύτερη;

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ: 0-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ Μ:13/19=68,42% Φ:8/32=25%
1-ΛΑΘΟΣ Μ:1/19=5,26% Φ: 7/32=21,875%
2-ΕΛΛΙΠΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ Μ: 5/19=26,31% Φ: 4/32=12,5%
3-ΣΩΣΤΟ Μ:0/19=0% Φ: 13/32=40,62%

1^{η} απόδειξη: Καθένα από τα ν σημεία ορίζουν με κάθε ένα από τα υπόλοιπα ν-1 ευθείες, οι οποίες όμως διέρχονται από δύο ακριβώς σημεία από αυτά, οπότε τις μετράμε δύο φορές. Συνεπώς το πλήθος τους είναι ίσο με $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$.

2η απόδειξη: Για ν=3, έχουμε $\frac{3(3-1)}{2}=3$. Σωστό, από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχονται τρεις ευθείες. Υποθέτουμε ότι από ν σημεία διέρχονται $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ευθείες και θα αποδείξουμε ότι, από ν+1 σημεία διέρχονται $\frac{(\nu+1)\nu}{2}$ ευθείες. Πράγματι από την επαγωγική υπόθεση και το γεγονός ότι επιπλέον των ν σημείο ορίζει με τα υπόλοιπα ν , ν ευθείες, έχουμε ότι τα ν+1 σημεία ορίζουν $\frac{\nu(\nu-1)}{2}+\nu=\frac{\nu(\nu-1)+2\nu}{2}=\frac{(\nu+1)\nu}{2}$ ευθείες.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Κανείς μαθητής δεν έφτασε σε κάποια απόδειξη από τις δύο. Οι λίγοι που κάτι προσπάθησαν ακολούθησαν τον επαγωγικό συλλογισμό, κάτι αναμενόμενο αφού το απαιτεί το ερώτημα, αλλά και όλη η κατεύθυνση του ερωτηματολογίου. **Η προσπάθειά τους όμως δεν διέφερε ουσιαστικά από το ερώτημα 2, ήταν δηλαδή καθαρά υπολογιστική- διαδικαστική, χωρίς κάποια διάθεση να εντάξουν το θέμα σε γεωμετρικό πλαίσιο.**

Μόνο στον έλεγχο για ν=3 (και ν=4 σε μία περίπτωση) αξιοποίησαν γεωμετρικά εργαλεία, όπως σχήματα και αξιώματα.

Είναι χαρακτηριστικό πως οι δύο μαθητές που εξέφρασαν άποψη για την καταλληλότερη μέθοδο, εκφράστηκαν υπέρ της μαθηματικής επαγωγής, χωρίς όμως να παρουσιάσουν σωστά κάποια από τις δύο μεθόδους. Ο ένας χωρίς δικαιολόγηση ανέφερε, *«Θεωρώ καλύτερη τη μαθηματική επαγωγή»,* έχοντας προσπαθήσει την επαγωγική απόδειξη. Ο δεύτερος με επαγωγικούς συλλογισμούς και ελέγχους (για ν=3 και ν=4) γενίκευσε την εικασία σε ν-γωνο, και θεωρώντας πως υπάρχει σταθερός αριθμός πλευρών και διαγωνίων, δηλαδή ευθειών που ορίζονται, καταλήγει πως αυτός ο αριθμός δεν μπορεί να είναι άλλος απ΄τον ζητούμενο. Χαρακτηρίζει αυτή την «απόδειξη» γεωμετρική, αλλά διαισθανόμενος πως κάτι δεν πάει καλά, θέτει θέμα εγκυρότητας και βρίσκει καταφύγιο στη μαθηματική επαγωγή: «*Η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή θα είναι καλύτερη διότι δε θα βασίζεται σε γεωμετρικά σχήματα, ούτε θα είναι τόσο αόριστη καθώς δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε πολύγωνο με πολύ μεγάλο αριθμό πλευρών, άρα δεν είναι απόλυτο.*»

Αν και η προτίμησή του εξηγείται λοιπόν σε μεγάλο βαθμό, η δικαιολόγησή της, που **διαχωρίζει την μαθηματική επαγωγή από την γεωμετρική εποπτεία, επαναφέρει στο προσκήνιο τον τρόπο με τον οποίο έχει διδαχθεί η ενότητα αυτή, (μόνο διαδικαστικά και όχι ευρετικά) και τις εσφαλμένες απόψεις που μπορεί να δημιουργηθούν στους μαθητές λόγω του τρόπου αυτού.**

Επιπλέον κατά την διδασκαλία (πάντα με διαλογική μορφή) των αποδείξεων της ερώτησης 5, στο πλαίσιο των συνεντεύξεων, κάποιοι μαθητές προσέθεταν μόνο τις καινούριες κάθε φορά ευθείες κατά την εξέταση ειδικών περιπτώσεων ν=3,4,5, και κατέληξαν στα αθροίσματα: 2+1, 3+2+1, 4+3+2+1 αντίστοιχα. Έτσι χρειάστηκε περαιτέρω διαπραγμάτευση για να εμφανιστεί ένα ενδιάμεσο στάδιο γενίκευσης που οδηγεί στο άθροισμα 1+2+3+…+(ν-1), και στην συνέχεια στο ζητούμενο αποτέλεσμα, με μαθηματική επαγωγή ή με άθροισμα πρώτων όρων αριθμητικής προόδου. **Οι μαθητές αυτοί βρήκαν πιο δύσκολη μια τέτοια προσέγγιση.**

2) Οι δύο παραπάνω αποδείξεις απαιτούν συλλογισμούς και όχι διαδικαστικές τεχνικές, δηλαδή βρίσκονται εκτός της «πεπατημένης» του σχολικού προγράμματος και κυρίως της εφαρμογής του, με ασκήσεις που απλώς απαιτούν εκτέλεση του αλγορίθμου. **Αυτό έχει σαν συνέπεια να αποτυγχάνουν ακόμα και μαθητές με ιδιαίτερα υψηλές επιδόσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα.** Επιπλέον στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών κατεύθυνσης Β′ Λυκείου **δεν γίνεται καμία νύξη περί εφαρμογής της μαθηματικής επαγωγής στη γεωμετρία, αντίθετα η όλη παρουσίαση ουσιαστικά εντάσσει την μαθηματική επαγωγή στην θεωρία αριθμών.**

3) **Το μεγαλύτερο ποσοστό των φοιτητών που δεν έδωσαν καμία απάντηση ή απάντησαν λάθος (συνολικά οι μισοί) εμφανίστηκε σε αυτή την ερώτηση.** Φαίνεται λοιπόν πως τα προβλήματα που χαρακτηρίζουν την σχολική περίοδο επιμένουν παρά την εξειδικευμένη ενασχόληση με τα μαθηματικά στο πανεπιστήμιο. Αναλυτικά εμφανίστηκαν τα εξής: Δύο έκαναν μόνο την $1^{η}$ απόδειξη και ο ένας δήλωσε πως την προτιμά, χωρίς αιτιολόγηση. Δύο έκαναν μόνο επαγωγικούς συλλογισμούς και ουσιαστικά απλώς διατύπωσαν την σωστή εικασία. Ένας προσπάθησε την $2^{η}$ απόδειξη, αλλά θεώρησε πως το επιπλέον σημείο ορίζει μία, αντί για ν ευθείες, κατέληξε (λανθασμένα) στις $\frac{(\nu+1)(\nu-2)}{2}$ ευθείες και ισχυρίστηκε πως αυτή είναι η μορφή (του $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$) για τα ν+1 σημεία. Ένας προσπαθεί επίσης την $2^{η}$ απόδειξη αλλά χειρίζεται λάθος το πλήθος των ευθειών των επιπλέον κάθε φορά σημείων, και δηλώνει πως προτιμά τη «γραφική» απόδειξη χωρίς να την αναφέρει. Δύο ισχυρίζονται πως απέδειξαν με επαγωγή το ζητούμενο επειδή το $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ παίρνει τη μορφή $\frac{(\nu+1)\nu}{2}$ αν θέσουμε όπου ν το ν+1, και ο ένας από αυτούς δίνει και την πρώτη απόδειξη στην μορφή των συνδυασμών των ν σημείων ανά δύο, γι′ αυτό και προτείνει την επαγωγική του «απόδειξη» ως αρμόζουσα στο επίπεδο των μαθητών. Τέλος δύο απλώς διατυπώνουν το δεύτερο βήμα της επαγωγής και ένας προσπαθεί με την εις άτοπο απαγωγή αλλά θεωρεί ως λογική άρνηση της πρότασης: Από ν σημεία διέρχονται $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ευθείες για κάθε ν>2, την πρόταση: Από ν σημεία δεν διέρχονται $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ ευθείες, για κάθε ν>2. Οι προτάσεις αυτές όμως, μπορεί να είναι ψευδείς και οι δύο, συνεπώς δεν είναι η μια άρνηση της άλλης, άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί η απαγωγή σε άτοπο.

4) Σωστές θεωρήθηκαν οι 13 απαντήσεις που εφάρμοσαν σωστά την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, με γεωμετρικό σκεπτικό, διότι αυτός ήταν ο στόχος της ερώτησης. Από τους 13 οι 6 έκαναν και τις δύο αποδείξεις και τέσσερεις εξέφρασαν άποψη γι' αυτές.

Συγκεκριμένα, ένας αναφέρει: «*Η άλλη απόδειξη είναι καθαρά λογική…Δεν μπορούμε να θεωρήσουμε κάποιον από τους τρόπους απόδειξης καλύτερο. Ο μεν πρώτος είναι τυπικός τρόπος, δηλαδή είναι θέμα πράξεων και εφαρμογής μιας συγκεκριμένης συνθήκης, ο δε δεύτερος είναι πιο ευρετικός αλλά καθαρά λογικός, οπότε υπάρχει η περίπτωση ο μαθητής να μην μπορέσει να ακολουθήσει τη λογική της απόδειξης. Φυσικά, η μαθηματική επαγωγή προϋποθέτει τη γνώση του αποτελέσματος, οπότε θα πρέπει να το έχουμε ήδη πεί στο μαθητή.*»

Άλλη απάντηση ήταν, *«Για παιδιά σχολείου καλύτερη λύση θεωρώ τη μαθηματική επαγωγή, γιατί τους δίνει τη δυνατότητα να έχουν μια εποπτική εικόνα της λύσης και επομένως να τη συνειδητοποιήσουν.»*

Η τρίτη άποψη διατυπώθηκε ως εξής: *«Προτιμώ αυτόν τον τρόπο, κυρίως για να τον διδάξουμε σε μαθητές λυκείου που φυσικά δεν είναι εξοικειωμένοι με την μαθηματική επαγωγή. Είναι πιο ευνόητος τρόπος και πιο απλός, ενώ με την μαθηματική επαγωγή θα χρειαστεί περισσότερος χρόνος διδασκαλίας που και πάλι δεν θα κάνει εμφανές αυτό που θέλουμε να δείξουμε κατά τη γνώμη μου.»*

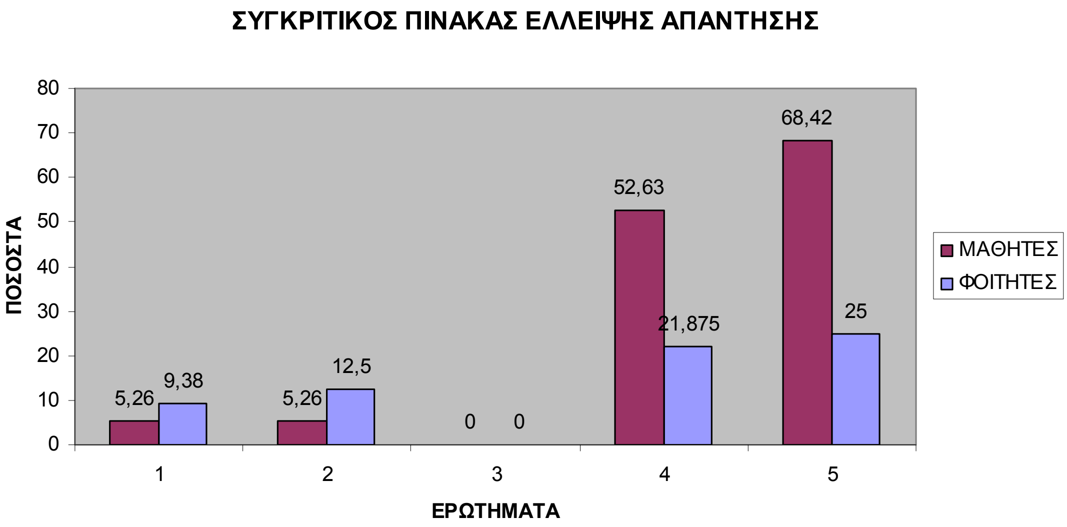
Τέλος υπήρξε και η λακωνική εκτίμηση: *«Η απόδειξη με επαγωγή δεν μας βοηθάει.»*

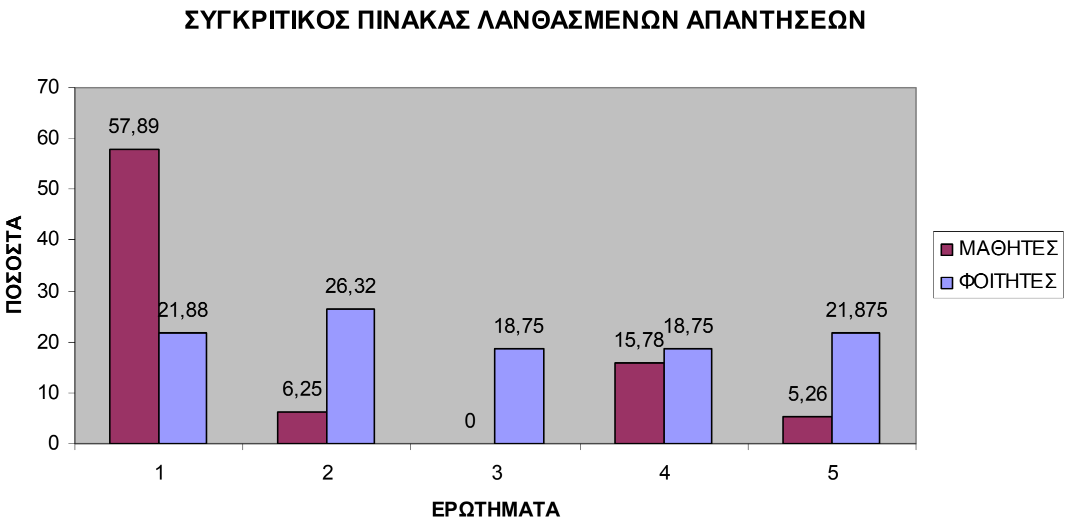
5) Παρατηρούμε πως, αν και ελάχιστες , οι απαντήσεις κάλυψαν ένα μεγάλο φάσμα των δυνατών απόψεων. Βέβαια σ' αυτό έπαιξε ρόλο και το γεγονός ότι για παράδειγμα, η διασύνδεση επαγωγής και εποπτείας έγινε διότι η άλλη απόδειξη έγινε στη μορφή των συνδυασμών των ν σημείων ανά δύο, χωρίς κανένα σχήμα, σε αντίθεση με τις άλλες απαντήσεις που και σχήμα είχαν και οι διατυπώσεις ήταν κοντά στη σχολική πραγματικότητα. **Υπενθυμίζεται πως ανάλογα με το τι θεωρεί κανείς άλλη (πλην της επαγωγικής) απόδειξη, χαρακτηρίζει την επαγωγή δέσμια του γεωμετρικού σχήματος ή όχι. Αντίστοιχα έγινε διασύνδεση λογικής και ευρετικής, σε αντιπαράθεση με το ζεύγος επαγωγής-εκτέλεσης πράξεων.**

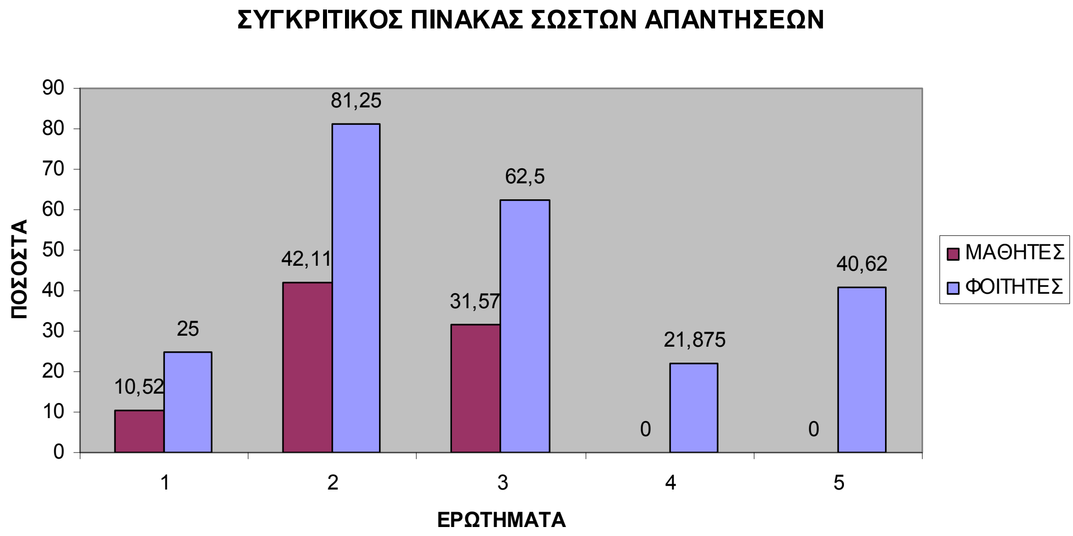
Υπήρξε προβληματισμός για τη φύση κάθε μεθόδου, καθώς και την αποτελεσματικότητά της, ενώ η εγκυρότητα και των δύο μεθόδων δεν αμφισβητήθηκε. **Επίσης, οι λίγοι που εξέφρασαν άποψη ξέφυγαν από το καθαρά υποκειμενικό πλαίσιο, και απάντησαν ως φοιτητές που μελετούν την Διδακτική των μαθηματικών.**

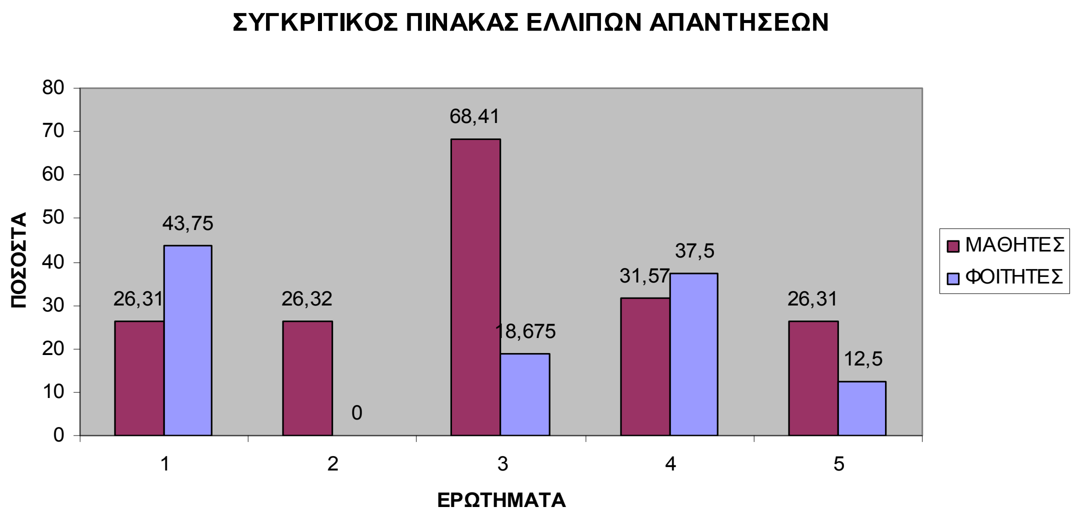
Είναι κατά την γνώμη μας πολύ σημαντικό οι φοιτητές του μαθηματικού τμήματος, πολύ περισσότερο στα πλαίσια του μαθήματος της Διδακτικής, να αντιδρούν με τρόπο που δείχνει τον προσανατολισμό τους στον τρόπο σκέψης του μαθητή, σε συνδυασμό με το γνωστικό αντικείμενο. Να λαμβάνουν υπόψη το χρόνο διδασκαλίας, τους επιμέρους στόχους κάθε διδακτικής ενότητας καθώς και το επιστημολογικό περιεχόμενο κάθε έννοιας και κάθε αποδεικτικής μεθόδου.

Ακολουθούν συγκριτικοί πίνακες μεταξύ των ερωτήσεων στο επίπεδο κάθε απάντησης


ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ
ΠΟΣΟΣΤΑ
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ
ΦΟΙΤΗΤΕΣ
5,26
9,38
5,26
12,5
0
0
52,63
21,875
68,42
25


ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΟΣΟΣΤΑ
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ
ΦΟΙΤΗΤΕΣ
57,89
21,88
6,25
26,32
0
18,75
15,78
18,75
5,26
21,875


ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΩΣΤΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΟΣΟΣΤΑ
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
10,52
25
42,11
81,25
31,57
62,5
0
21,875
0
40,62
1
2
3
4
5
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ
ΦΟΙΤΗΤΕΣ


ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΕΛΛΙΠΩΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΠΟΣΟΣΤΑ
80
70
60
50
40
30
20
10
0
26,31
43,75
26,32
0
68,41
18,675
31,57
37,5
26,31
12,5
1
2
3
4
5
ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΤΕΣ
ΦΟΙΤΗΤΕΣ

9. Συμπεράσματα

Παρά το μικρό μέγεθος του δείγματος που εξετάστηκε, καταγράφηκαν αποτελέσματα, που συμφωνούν με ευρήματα των ερευνητών Dubinski και Lewin (1986) και οδηγούν στην κατάταξη των μαθητών σε τρία επίπεδα κατανόησης της μαθηματικής επαγωγής. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούν και τα αποτελέσματα τα οποία εμφανίστηκαν και στην εργασία της Μ. Πάλλα (2006) σε μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό πληθυσμό. Στο πρώτο επίπεδο οι μαθητές αγνοούν την δομή και τον αλγόριθμο, στο δεύτερο εκτελούν την διαδικασία μηχανικά, και στο τρίτο ανταποκρίνονται ικανοποιητικά και στην δομική και στην διαδικαστική συνιστώσα της έννοιας. Φαίνεται πως οι περισσότεροι βρίσκονται στο δεύτερο επίπεδο, κάτι που κρίνεται ως αναμενόμενο αφού η συνολική κατεύθυνση της σχολικής δραστηριότητας στο συγκεκριμένο αντικείμενο ευνοεί την αλγοριθμική και μόνο αντιμετώπιση.

Ο προσανατολισμός του ερωτηματολογίου σε μια πιο ευρετική κατεύθυνση κινητοποίησε τους μαθητές, τους κέντρισε το ενδιαφέρον για μια άλλη όψη των μαθηματικών, η οποία είναι άγνωστη σε αυτούς. Από τις συνεντεύξεις και τις συζητήσεις που ακολούθησαν φάνηκε πως το παιχνίδι ανακάλυψης βελτιώνει την εικόνα που έχουν οι μαθητές για τα μαθηματικά, συγχρόνως όμως έρχεται σε σύγκρουση με τις απαιτήσεις κάλυψης της διδακτέας ύλης και της εξεταστικής επιτυχίας. Το ότι δεν προηγήθηκε διδακτική παρέμβαση σε αυτή την κατεύθυνση είχε ως αποτέλεσμα μόνο οι μαθητές υψηλών επιδόσεων να ανταποκριθούν σωστά στο αντίστοιχο ερώτημα. Πιστεύουμε πως κατάλληλες διδακτικές καταστάσεις που θα εμπλέκουν τους μαθητές σε παιχνίδι ανακάλυψης μπορούν να οδηγήσουν σε πιο ασφαλείς εκτιμήσεις που θα αφορούν το σύνολο των μαθητών.

Στο γεωμετρικό ερώτημα εμφανίστηκαν οι μεγαλύτερες δυσκολίες. Όσοι μαθητές έκαναν κάποια προσπάθεια, δεν αξιοποίησαν καθόλου την γεωμετρική εποπτεία. Η προσπάθειά τους δεν διέφερε ουσιαστικά από το ερώτημα 2, ήταν δηλαδή καθαρά υπολογιστική - διαδικαστική, χωρίς κάποια διάθεση να εντάξουν το θέμα σε γεωμετρικό πλαίσιο. Μόνο στον έλεγχο για ν=3 (και ν=4 σε μία περίπτωση) αξιοποίησαν γεωμετρικά εργαλεία, όπως σχήματα και αξιώματα. Από μερικούς μαθητές αναφέρθηκε στις συνεντεύξεις, πως η διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής στο κεφάλαιο της θεωρίας αριθμών, καθώς και η έλλειψη εφαρμογών και ασκήσεων με γεωμετρικό περιεχόμενο, είχε ως αποτέλεσμα να μην σκεφτούν καθόλου «γεωμετρικά» .

Στην προσπάθεια χειρισμού πεπερασμένων αθροισμάτων κατά την απόδειξη ισοτήτων, σε αρκετές περιπτώσεις, το «ν» θεωρήθηκε ως μεταβλητή γενικού όρου ακολουθίας με λογική συνέπεια να γίνουν πολλά υπολογιστικά λάθη. Με δεδομένη την μη επαφή με την έννοια του μερικού αθροίσματος ακολουθίας που υποκρύπτεται, η παρέμβαση του διδάσκοντα είναι καθοριστική για το ξεπέρασμα αυτής της δυσκολίας, αφού η γνώση της μεθόδου δεν επαρκεί για την σωστή εφαρμογή της.

Η λανθασμένη ή ελλιπής διατύπωση της αρχής της μαθηματικής επαγωγής φαίνεται να μην επιδρά στην σωστή εφαρμογή της, αφού εμφανίστηκαν μεγάλες διαφορές στα ποσοστά των σωστών απαντήσεων, μεταξύ πρώτης και δεύτερης ερώτησης υπέρ της δεύτερης. Ο προσανατολισμός της σχολικής πράξης στην εκτέλεση του αλγορίθμου επιδρά σε αυτήν την κατεύθυνση. Δεν θα πρέπει όμως να αγνοηθούν και οι σοβαρές αδυναμίες που εμφανίζουν οι μαθητές, στην έκφραση είτε στον προφορικό είτε στον γραπτό λόγο, ειδικά εκεί όπου απαιτείται ακρίβεια και σαφήνεια, όπως στις μαθηματικές διατυπώσεις. Δεν καταγράφηκε η αντίστροφη συσχέτιση, δηλαδή η σωστή διατύπωση να οδηγήσει σε λάθος εφαρμογή.

Οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνα αν και γενικά σημείωσαν πολύ καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές, εμφάνισαν και σημαντικές αδυναμίες ειδικά στο γεωμετρικό θέμα. Φαίνεται πως το γεγονός ότι η μαθηματική επαγωγή ως αποδεικτική μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε γεωμετρικά θέματα, δεν έχει επαρκώς εμπεδωθεί. Παρατηρήθηκε επίσης κάποια απροθυμία των φοιτητών να απαντήσουν σε ερωτήματα για τα οποία είχαν αμφιβολίες για την ορθότητα της απάντησής τους, γεγονός που ίσως δείχνει κάποια χαλάρωση του διδακτικού συμβολαίου στην τριτοβάθμια εκπαίδευση.

Το υψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων οι φοιτητές (όπως και οι μαθητές) το εμφανίζουν όταν απαιτείται η εκτέλεση του αλγορίθμου της μαθηματικής επαγωγής, εύρημα που είναι συμβατό με τον προσανατολισμό της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην διαδικαστική γνώση και μάθηση, που φαίνεται να εξακολουθεί να επιδρά και στους φοιτητές.

10. Επίλογος

Οποιαδήποτε προσπάθεια διατύπωσης προτάσεων που αφορούν την εκπαίδευση πρέπει να λάβει υπόψη πολλές παραμέτρους. Το ανθρώπινο δυναμικό που συγκροτεί το εκπαιδευτικό περιβάλλον, (παιδιά, δάσκαλοι, γονείς, τοπικές κοινωνίες,...) πρέπει να πορευτεί από κοινού, παρά τις (συχνά) αντικρουόμενες επιδιώξεις τους.

Οι ερευνητικές δράσεις της διδακτικής έχουν εξ ορισμού πειραματικό χαρακτήρα, με κύριο αντικείμενο όμως τους μαθητές, γεγονός που επιβάλλει επιπλέον ευαισθησία. Έχουν ανοίξει δρόμους που συνεισφέρουν στην κατανόηση του τρόπου σκέψης και δράσης των μαθητών.

Ο κεντρικός προβληματισμός της παρούσας έρευνας εστίασε στην **αντίθεση μεταξύ της διαδικαστικής μάθησης και της εμβάθυνσης στις έννοιες** που εμπλέκονται στις διαδικασίες αυτές. Η κυριαρχία της εκμάθησης διαδικασιών είναι κοινός τόπος μεταξύ των εκπαιδευτικών. Το ερώτημα είναι αν οδηγεί στην σταθερή σε βάθος χρόνου κατανόηση ή απλώς στην εξεταστική επιτυχία.

Πιστεύουμε πως ο εκπαιδευτικός έχει την δυνατότητα της **υπέρβασης της παραπάνω αντίθεσης, αξιοποιώντας τον διττό χαρακτήρα των μαθηματικών εννοιών**, οι οποίες είναι αποτελέσματα διαδικασιών, αλλά συγχρόνως έχουν και αυτόνομη δομή. Ο χαρακτήρας αυτός των εννοιών από πηγή δυσκολιών μπορεί να μετατραπεί σε εργαλείο ξεπεράσματος των δυσκολιών αυτών.

Η διδασκαλία της μαθηματικής επαγωγής δίνει πιστεύουμε την ευκαιρία, μέσα από την προσπάθεια **ανακάλυψης της εικασίας** που θα αποδειχθεί μετά, να φέρει τους μαθητές σε επαφή με τη διαδρομή που ίσως και η ίδια η μαθηματική ανακάλυψη ακολουθεί. Έτσι μπορεί να γίνουν ενεργητικοί παράγοντες της διαδικασίας της μάθησης, και οι γνώσεις τους ίσως γίνουν λιγότερο εύθραυστες.

Ο δρόμος προς την εικασία που απαντά σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, περνά μέσα από τον χειρισμό εννοιών πιθανά και εκτός του συνηθισμένου πεδίου εφαρμογής τους, **καλλιεργείται η φαντασία, εμφανίζεται το ανθρώπινο πρόσωπο των μαθηματικών**. Πιστεύουμε πως χρειάζεται περαιτέρω έρευνα πάνω σε αυτή την τοποθέτηση, με στόχο οι καθημερινές δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο δάσκαλος των μαθηματικών, όταν προσπαθεί να πείσει και να εμπνεύσει τους μαθητές του, να ελαχιστοποιηθούν όσο είναι δυνατό.

Η αίσθησή μας είναι πως μόνο η σε βάθος κατανόηση των εννοιών μπορεί να οδηγήσει στην απόκτηση γνώσεων με σταθερότητα σε βάθος χρόνου, αλλά και στην σωστή εκτέλεση αλγορίθμων, χωρίς μηχανική επανάληψή τους.

Σε μια εποχή που η σκέψη, η φαντασία και η έμπνευση δεν θεωρούνται "αποδοτικές" προτείνουμε τον προβληματισμό που γεννά η ρήση του Gaston Bacherard

" Μπορεί κανείς να μελετήσει αυτό που έχει πρωτύτερα ονειρευτεί"

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

ΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 1^{Ο} ΕΡΩΤΗΜΑ

Μ1 : (1) Την χρησιμοποιούμε για ισχυρισμούς που περιέχουν φυσικούς αριθμούς.

Μ2 : (1) Μαθηματική επαγωγή είναι η απόδειξη ισοτήτων μέσα από υποθέσεις για το αν ισχύει για κάποιον αριθμό «ν» και για τον επόμενό του.

Μ3 : (2) Αν έχουμε έναν ισχυρισμό Ρ(ν) με ν > κ , $\nu \in \mathbb{N}$ τότε αποδεικνύουμε ότι ισχύει το Ρ(κ) και δεχόμαστε ότι ισχύει και το Ρ(ν). Μετά αποδεικνύουμε ότι ισχύει και το Ρ(ν+1).

Μ4 : (1) Μαθηματική επαγωγή είναι μια εικασία που κάνουμε για μια ομάδα αριθμών που έχουν ανάμεσά τους το ν και την αποδεικνύουμε ότι ισχύει ν=1 δεχόμαστε ότι ισχύει για ν και την αποδεικνύουμε ότι ισχύει για ν+1.

Μ5: (1) Μαθηματική επαγωγή είναι ένας τύπος ο οποίος βοηθάει να βρούμε έναν αριθμό σε μια καθορισμένη ακολουθία αριθμών.

Μ6: (1) Η μαθηματική επαγωγή αποδεικνύει την ισχύ οποιασδήποτε υπόθεσης για Ρ(ν+1) δεδομένου του ότι δεχόμαστε την ισχύ του αντίστοιχου Ρ(ν) οπού ν φυσικός ακέραιος.

Μ7: (1) Με την αρχή αυτή αποδεικνύουμε εξισώσεις και ανισώσεις.

Μ8: (1) Είναι η αρχή, για να αποδείξουμε ισχυρισμούς που περιέχουν μεταβλητή φυσικό αριθμό.

Μ9: (3) Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, αν θέλουμε να ελέγξουμε αν ένας τύπος με έναν άγνωστο ν είναι σωστός για μια ομάδα αριθμών ν , τότε κοιτάμε πρώτα αν επαληθεύεται για ν= ο πρώτος αριθμός της ομάδας. Μετά αν επαληθευτεί υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει και προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι ο τύπος ισχύει βάζοντας όπου ν τον επόμενο αριθμό δηλ. το ν+1. Αν επαληθευτεί και για ν+1 τότε ο τύπος είναι σωστός και ισχύει για κάθε ν= οποιοσδήποτε αριθμός της συγκεκριμένης ομάδας.

Μ10: (3) Για να αποδείξουμε ότι μια σχέση ισχύει για κάθε αριθμό $\nu \in \mathbb{N}^*$ αποδεικνύουμε ότι ισχύει για την πρώτη τιμή του ν και, στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $\nu \in \mathbb{N}^*$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για τον επόμενό του.

Μ11: (1) Αν μια μαθ. επαγωγή ισχύει για ν=1 τότε υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιον ν και δείχνουμε ότι ισχύει για ν+1.

Μ12: (1) Αν για μια εξίσωση Ρ(ν) όπου ισούται με έναν αριθμό ν, μπορούμε να δείξουμε σε κάποια στάδια ότι ισχύει για κάθε ακέραιο αριθμό αρκεί να ισχύει για ν=1. Μετά θα αποδείξουμε ότι ισχύει για κάθε ν=κ. και αφού ισχύει για κ θα ισχύει και για κάθε αριθμό συνεχόμενο του κ.

Μ13: (2) Αρχή της μαθηματικής επαγωγής ονομάζουμε την αποδεικτική μέθοδο με την οποία αποδεικνύουμε πρώτα ότι μια πρόταση ισχύει για τον πρώτο αριθμό του πεδίου ορισμού της και ύστερα, αφού ισχύει για κάποιο αριθμό ν, ότι ισχύει και για τον επόμενο, δηλαδή τον ν+1.

Μ14: (1) Η μαθηματική επαγωγή βασίζεται στο να αποδειχθεί ότι ισχύει μια διατύπωση για τον πρώτο ακέραιο θετικό αριθμό ν και να ισχύουν οι συνθήκες για να επαληθεύεται για οποιονδήποτε άλλο θετικό ακέραιο αριθμό του τύπου ν+1.

Μ15: ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ

Μ16:

Μ17: (2) Έστω ένας ισχυρισμός Ρ(ν), όπου ν φυσικός αριθμός, που αφορά τους φυσικούς αριθμούς. Εάν ο ισχυρισμός επαληθεύεται για κάποιο τυχαίο ν, και αποδειχθεί ότι ισχύει και για τον επόμενό του (ν+1), τότε ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Μ18:(1) Η διατύπωση είναι ότι αν μια θεωρία (εικασία) ισχύει για έναν οποιοδήποτε αριθμό, τότε θα ισχύει και για τον επόμενό του (ν+1).

Μ19: (2) Όταν έχουμε μια μαθηματική πρόταση (εξίσωση, ανίσωση,…) με παράμετρο ν και θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει ν=1 και στη συνέχεια αν δείξουμε ότι ισχύει και για ν+1 ισχύει για κάθε ν.

Μ20: (2) Αν έχουμε έναν ισχυρισμό Ρ(ν) και ο ισχυρισμός αυτός ισχύει για έναν φυσικό αριθμό π.χ. Ρ(1) τότε δεχόμαστε ότι ισχύει ο ισχυρισμός μας (Ρ(ν)). Αν αποδείξουμε ότι ισχύει και για Ρ(ν+1) τότε θα ισχύει για όλους τους υπόλοιπους.

Φ1: **(3)** Έχουμε μια πρόταση η οποία ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Τότε :

1) Ελέγχουμε την ισχύ της πρότασης για n=n_0

2) Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για n

3) Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=n+1.

Τότε η πρόταση ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$

Φ2: (0)

Φ3: (3) Έστω $X \subseteq \mathbb{N}$. Αν ισχύουν οι : (I) $0 \in X$. (II) Αν $n \in X$ τότε $n+1 \in X$

Τότε $\mathbb{N} = X$.

Φ4: (2) Έστω Π(ν). Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν. θα δείξουμε ότι ισχύει και για ν+1.

Φ5: (0)

Φ6: (1) Αν P(ν) η σχέση που θέλουμε να δείξουμε

- Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για n=1.

-Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν+1 και δείχνουμε ότι ισχύει για n.

Φ7: (2) Έστω ότι P μια μαθηματική ιδιότητα. Λέμε ότι P(n) ισχύει αν ο n ικανοποιεί την ιδιότητα P. Έστω ότι P(0) ισχύει, δηλ το μηδέν ικανοποιεί την ιδιότητα P. Έστω P(n) ισχύει, για κάποιο φυσικό αριθμό n, τότε ισχύει P(n+1), δηλ ο αριθμός n+1 ικανοποιεί την ιδιότητα P. Τότε η P(n) ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n.

Φ8: (2) Έστω ότι έχουμε μια επαγωγική πρόταση. Ελέγχουμε αν η P(0) αληθεύει. Για ν=κ, δεχόμαστε ότι ισχύει η πρόταση. Προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει η πρόταση για ν=κ+1. Αν ισχύει, τότε δεχόμαστε ότι ισχύει η αρχική επαγωγική πρόταση.

Φ9: (1) Έστω ότι ισχύει για P(n). Αφού ισχύει για P(n) θα ισχύει και για P(ν+1).

Φ10: (1) Έστω μια σχέση P(n). Έστω ότι η σχέση P(n) ισχύει για P(1). Υποθέτω ότι ισχύει για P(κ) τότε θα ισχύει για P(κ+1).

Φ11: (2) Έστω ότι έχουμε μια πρόταση. Αν για αυτή τη πρόταση ισχύει το $1^{ο}$ βήμα και έστω ότι ισχύει και το ν-οστό τότε αν αποδείξουμε ότι ισχύει το ν+1 βήμα. Θα ισχύει και το ν-οστό βήμα.

Φ12: (1) Είναι η μέθοδος απόδειξης, όπου ξεκινούμε και δείχνουμε ότι μια σχέση ισχύει σε μια συγκεκριμένη περίπτωση και στη συνέχεια δείχνουμε ότι ισχύει για όλες.

Φ13: (2) Μαθηματική Επαγωγή: 1) Μια σχέση ισχύει για ν=1. 2) Έστω ότι ισχύει για ν=ν. 3) Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για ν=ν+1.

Φ14: (3) Έστω P(n) μια σχέση μεταξύ φυσικών αριθμών. i) Αν η P(ν) ισχύει για n=1. ii) και εάν υποθέτοντας ότι η P(n) ισχύει για ν δείξει ότι ισχύει για n+1, τότε ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Φ15: (1) Εάν μία σχέση στα μαθηματικά ισχύει για έναν αριθμό ν, τότε θα ισχύει και για ν=ν+1. Αυτό ονομάζεται μαθηματική επαγωγή, και χρησιμοποιείται ευρέως στα μαθηματικά για την απόδειξη διαφόρων σχέσεων.

Φ16: (3) Έστω μια μαθηματική πρόταση P(n), όπου n θετικός ακέραιος. Αν η P(1) ισχύει, και αν η P(n) ισχύει, έπεται ότι και η P(n+1) ισχύει, (δηλ. P(n)$\Rightarrow$P(n+1)), τότε η πρόταση ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

Φ17: (3) Όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια σχέση ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό ν, τότε ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

(Ι) Αποδεικνύουμε ότι η σχέση ισχύει για ν=1.

(ΙΙ) Δεχόμαστε ότι η σχέση ισχύει για ν=κ.

(ΙΙΙ) Τέλος αποδεικνύουμε ότι η σχέση ισχύει για ν=κ+1.

Φ18: (2) Στη μαθηματική επαγωγή διακρίνουμε τρία βήματα. Αρχικά διαπιστώνουμε αν ισχύει ο τύπος για αρχικές τιμές. Στη συνέχεια ορίζουμε αυθαίρετα τον τύπο για n βήμα. Τέλος διατυπώνουμε τον τύπο για n βήμα, στο επόμενο αριθμό n+1 και αποδεικνύουμε ότι ισχύει για το n+1 βήμα. Έχοντας αποδείξει ότι ισχύει για τις αρχικές τιμές και υποθέτοντας ότι ισχύει για n, τότε αν ισχύει και για n+1 τότε αποδεικνύουμε ότι ισχύει για όλους τους αριθμούς.

Φ19: (2) Ελέγχουμε αν αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει για κ=0. Δείχνουμε ότι ισχύει, και θεωρούμε ότι ισχύει για κ=ν, και δείχνουμε ότι ισχύει και για κ=ν+1. Αν ισχύει και για κ=ν+1 τότε ισχύει!

Φ20: (2) Έστω ότι P(0) ισχύει, για να δείξουμε ότι μια ιδιότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει για n+1, $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή δείχνουμε ότι ισχύει για P(n+1), δεδομένου ότι ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Φ21: (1) Αν Ι μια ιδιότητα και χ δοσμένος/συγκεκριμένος αριθμός ικανοποιεί την ιδιότητα. (Φανερό). Και έστω η Ι ικανοποιείται για $n=\kappa\in\mathbb{N}$. Αν δείξουμε ότι η Ι ικανοποιείται για $n=\kappa+1\in\mathbb{N}$ τότε η Ι ικανοποιείται $\forall n\in\mathbb{N}$.

Φ22: (2) i) Ελέγχουμε αν ισχύει η σχέση που μας δίνεται για κ=1 [για τον πρώτο αριθμό του διαστήματος που ισχύει η σχέση]. ii) Θεωρούμε ότι ισχύει η σχέση που μας δίνεται για κ=ν, και ελέγχουμε αν ισχύει για κ=ν+1. Αν ισχύουν τα παραπάνω έχουμε αποδείξει ότι η σχέση ισχύει για κάθε αριθμό n και για τον επόμενο n+1. Άρα ισχύει σε όλο το διάστημα που μας δίνεται.

Φ23: (2) Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής χωρίζεται σε τρία στάδια. Το 1^o βήμα είναι ότι η σχέση που μας έχει δοθεί την δείχνουμε ότι ισχύει για κάποιο δεδομένο (το αρχικό, π.χ. αρχική τιμή), το 2^o βήμα είναι ότι υποθέτουμε ότι ισχύει η σχέση, το αποτέλεσμα που μας έχει δοθεί για n, και στο τελευταίο στάδιο, το 3^o αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για n+1. Αν ισχύει και για n+1 τότε ισχύει και για n. Άρα η αρχή της μαθηματικής επαγωγής βασίζεται ότι η απόδειξη της σχέσης που μας δίνεται γίνεται επαγωγικά.

Φ24: (2) α) Αν μια πρόταση ισχύει για ν=0. β) Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν=κ. γ) Αν ισχύει για ν=κ+1 τότε ισχύει και η πρόταση.

Φ25: (2) Μια σχέση ισχύει όταν: 1) επαληθεύεται για ν=0 και αν ισχύει για ν=κ, 2)θα πρέπει να ισχύει για ν=κ+1.

Φ26: (1) Έστω R_v μια σχέση που ορίζεται για φυσικούς από ν=0 έως κ. Εάν η R_v ισχύει για ν=0. Υποθέτουμε ότι ισχύει για ν=κ. Εάν αποδειχθεί ότι η σχέση ισχύει για κ+1, η σχέση ισχύει για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$

Φ27: (2) Έστω μία σχέση ν που ορίζεται για ν=0. Έστω ότι ισχύει για ν=κ, αν ισχύει για ν=κ+1 Τότε ισχύει για κάθε ν.

Φ28: (2) Έστω P(n) υπόθεση. Αν η υπόθεση ισχύει για ν=1. Αν δεχτούμε ότι η υπόθεση ισχύει για ν=κ, και καταλήξουμε στο ότι η υπόθεση ισχύει για ν=κ+1 τότε η αρχική μας υπόθεση P(ν) ισχύει γενικά.

Φ29: (0)

Φ30: (3) Αν μία πρόταση P ισχύει για $n_0=1$ τότε αν ισχύει για κάποιον τυχαίο φυσικό αριθμό n και αποδείξω ότι ισχύει για τον επόμενό του n+1 τότε συνεπάγεται ότι η P ισχύει για κάθε φυσικό n.

Φ31: (3) Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει μια μαθηματική πρόταση P(ν). Ελέγχουμε αν αυτή η πρόταση P(ν) ισχύει για ν=1. Αν P(1) αληθής συνεχίζουμε. Δεχόμαστε ότι ισχύει η P(ν) και για ν=κ. Στο τελευταίο βήμα θα εξετάσουμε αν ισχύει η P(ν) για ν=κ+1. Αν P(κ+1) αληθής ότι η P(ν) ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Φ32: (3) Έστω ότι έχουμε να αποδείξουμε μια μαθηματική σχέση: P(ν) όπου $n \in \mathbb{N}$ τότε εργαζόμαστε ως εξής: Διαπιστώνουμε ότι η σχέση P(ν) ισχύει για ν=1. Υποθέτουμε ότι η P(ν) ισχύει για $n \in \mathbb{N}$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει για ν+1, δηλαδή ότι η P(ν+1) ισχύει.

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2</u>

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑΤΑ ΑΠΟ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ ΣΕ ΜΑΘΗΤΕΣ

I. Συν: «γράφεις ένα δεύτερο, τέσσερα έκτα, εννέα δωδέκατα»

Μ20: «δεν απλοποίησα»

Συν: «και άλλοι δεν απλοποίησαν αλλά βρήκαν την εικασία, και εσύ είσαι σε καλό δρόμο, …., γράφεις στο αριθμητή ν τετράγωνο, για τον παρονομαστή ήταν ένα απλό(!) βηματάκι…ποιος είναι ο παρονομαστής άμα γενικεύσεις το δύο το έξι το δώδεκα»

Μ20: «το δύο είναι δύο επί ένα, το έξι είναι δύο επί τρία, το δώδεκα είναι δύο επί έξι…»

Σ: « μπορείς και δύο επί έξι αλλά…»

Μ20 : Κοιτάζοντας τα κλάσματα: «τρία επί τέσσερα»

Σ: «τι κοινό έχουν οι παρονομαστές;»

Μ20: «έχουν τον τελευταίο κοινό ανά δύο ή όχι;»

Σ: «….»

Μ20: « αυξάνονται κατά ένα»

Σ: « δηλαδή ποια είναι τελικά η εικασία; ν τετράγωνο προς…»

Μ20: « ν επί ν και ένα»

II. Ο μαθητής Μ19 που έχει υπολογίσει τα κλάσματα χωρίς να τα απλοποιήσει, δηλαδή 1/2 , 4/6 , 9/12 και έχει παρατηρήσει (στο γραπτό του) πως η διαφορά μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή απλώς αυξάνεται, οπότε δεν μπορεί να συνεχίσει. Στην συνέντευξη απλοποίησε και παρατήρησε:

Μ19: «Βλέπουμε πως ο παρονομαστής του πρώτου κλάσματος για ν=1 γίνεται αριθμητής του δεύτερου κλάσματος για ν=2, και το ίδιο για ν=3»

Συν: « Άρα πόσο κάνει το άθροισμα για ν;»

Μ19: «ν προς ν+1»

III. M16: «παρατηρώ ότι [στα κλάσματα 1/2 , 4/6 , 9/12] αυξάνεται η διαφορά του παρονομαστή από τον αριθμητή κατά ένα»

Συν: «Άρα εδώ [στο ν-οστό βήμα] θα διαφέρουν κατά πόσο;»

M16: «θα διαφέρουν…»

Συν : « Στο $\frac{1}{1\cdot 2}$ διαφέρουν κατά 1, στο $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$ διαφέρουν κατά 2, στο $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$ διαφέρουν κατά 3, δεν είναι τυχαίο…»

M16: « Είναι ανάλογα με τον όρο που πολλαπλασιάζουμε στον παρονομαστή του τελευταίου κλάσματος»

Συν: « Άρα στο $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{\nu\cdot(\nu+1)}$ θα διαφέρουν κατά…»

M16: « Κατά ν »

Συν: « Σωστά, αλλά ποιοι είναι οι αριθμοί που διαφέρουν κατά ν ; »

M16: «…»

Με την βοήθεια του συνεντευκτή βρέθηκε η εικασία και μάλιστα δηλώθηκε από το μαθητή πως παρόλα αυτά, δεν έχει γίνει απόδειξη.

IV. Αφού ακολουθήθηκε η ίδια διαδικασία ένας μαθητής προχώρησε περισσότερο.

M12: « Στο $\frac{1}{1\cdot 2}$ το 1 βρίσκεται και στον παρονομαστή, στο $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$ το 4 [του 4/9] είναι 2 επί 2, και στο $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$ το 9 [του 9/12] είναι 3 επί 3»

Συν: « το 9 τι είναι του 3; »

M12: « το τετράγωνό του»

Στη συνέχεια οδηγήθηκε ο μαθητής στην μορφή $\nu^2/(\nu^2+\nu)$ και ακολούθησε συζήτηση για το ρόλο που θα είχε η απλοποίηση των κλασμάτων στην εύρεση της εικασίας.

v. Με καθοδηγούμενη διδασκαλία ο μαθητής βλέπει την απόδειξη χωρίς επαγωγή και ακολουθεί ο εξής διάλογος.

Συν: « Αυτή είναι η μία απόδειξη, χωρίς μαθηματική επαγωγή…»

Μ20: « Με μαθηματική λογική ή όχι;»

Συν: «Έτσι τη χαρακτηρίζεις; με μαθηματική λογική.»

Μ20: «Ναι έτσι πιστεύω.»

Συν: «Τίποτα άλλο δεν χρησιμοποίησες;…………Πως βρήκες ότι από τα ν σημεία διέρχονται ν-1 ευθείες;» ακολουθεί διαπραγμάτευση και τελικά…

Μ20: « γιατί από την ευκλείδεια γεωμετρία έχουμε θεώρημα που λέει ότι από δύο σημεία περνάει μοναδική ευθεία»

Συν: «θεώρημα;»

Μ20: «…»

Συν: «Αποδεικνύεται αυτό δηλαδή;»

Μ20: «Α, όχι είναι αξίωμα»

Συν: « άρα στηριχτήκαμε μόνο στην μαθηματική λογική;»

Μ20: « όχι, και στην ανθρώπινη λογική»

Συν: « Δηλαδή τα αξιώματα της γεωμετρίας τα χαρακτηρίζεις ανθρώπινη λογική»

Μ20: « Θα τα χαρακτήριζα αυθαίρετα αποτελέσματα, δηλαδή τα ορίσαμε εμείς χωρίς να μπορούμε να το αποδείξουμε, κάποιος άλλος άνθρωπος μπορεί να το όριζε διαφορετικά, αλλά από την στιγμή που δεν μπορούμε να το αποδείξουμε; »

Συν: «Σε κάποια άλλη γεωμετρία ίσως;»

Μ20: «Ναι, σε μη ευκλείδεια γεωμετρία»

Με διαλογικής μορφής διαπραγμάτευση ο μαθητής Μ20 βλέπει και την δεύτερη απόδειξη, με μαθηματική επαγωγή. Μετά την απόδειξη για ν=3, την διατύπωση της επαγωγικής υπόθεσης, και την διατύπωση της αποδεικτέας σχέσης, για ν+1 σημεία, το πέρασμα από το ν στο ν+1 παρουσίασε δυσκολίες όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

Συν: «Το πέρασμα από το ν στο ν+1 θέλει απόδειξη;»

Μ20: « Όχι, δε χρειάζεται»

Συν: «Δηλαδή μόνο για ν=3 αποδεικνύουμε;»

M20: «Μπορούμε να δείξουμε για ν=4,..., αλλά πάλι είναι ειδικό το παράδειγμα δεν βγάζει πουθενά»

Συν: « Στην ερώτηση δύο ήταν περιττά όσα έδειξες;»

M20: « Όχι, χρειάστηκε να αποδείξω, διότι το ν ήταν τυχαίο»

Στη συνέχεια αποδεικνύει το ζητούμενο και σχολιάζει:

M20: « Θα προτιμούσα την πρώτη απόδειξη την λογική, βέβαια δεν ξέρω αν είναι και πολύ στερεή αυτή η απόδειξη»

Συν: «Δεν σε πείθει, δηλαδή;»

M20: « Δεν μπορώ να πώ ότι βασισμένοι στη λογική του άλλου μπορεί να το καταλάβει οποιοδήποτε,..., να το υποθέσει, μάλλον οποιοσδήποτε»

Συν: « πες ότι απευθύνεσαι σε έναν μαθηματικό που θα καταλάβει και τις δύο αποδείξεις, ποια είναι η γνώμη σου;»

M20: « Τότε σαν πιο σίγουρη λύση, θα χρησιμοποιούσα τη δεύτερη»

Συν: «Τη θεωρείς πιο έγκυρη, πιο μαθηματικά αυστηρή;»

M20: « Ναι, πιο μαθηματικά αυστηρή, αν και η πρώτη στηρίζεται περισσότερο στη λογική, όπως είπαμε, η δεύτερη είναι περισσότερο μαθηματικά»

Συν: « Η μαθηματική επαγωγή δεν έχει λογική;»

M20: « Έχει, απλά ίσως επειδή δεν την έχουμε, ή δεν την έχω, συνηθίσει,...,ναι είναι λογική η μαθηματική επαγωγή, αλλά για κάποιον μαθητή στην ηλικία των δεκαέξι δεκαεπτά, δεν ξέρω πόσο μπορεί να την κατανοήσει»

....

Συν: « Ήταν στην εξεταστέα ύλη η μαθηματική επαγωγή;»

M20: « Όχι καθόλου»

VI. Γίνεται η πρώτη απόδειξη και...

Συν: «Αυτή είναι η μία απόδειξη»

M20: « Ναι, είναι πρακτική, κατασκευής, δεν είναι...»

.

.

Ακολουθεί η προσπάθεια απόδειξης με μαθηματική επαγωγή, μετά την επαλήθευση για ν=3, διατυπώνεται εύκολα η μορφή για το ν+1, αλλά μάλλον η προσέγγιση είναι αλγεβρική, όχι γεωμετρική…

Συν: «Πως θα αποδείξουμε ότι από ν+1 σημεία διέρχονται τόσες ευθείες;»

Μ20: « Με τον παραδοσιακό τρόπο»

Συν: «Ποιος είναι αυτός;»

Μ20: «Της επαγωγής»

Ξεφεύγει στιγμιαία προς την πρώτη απόδειξη.

Συν: « Σκέψου γεωμετρικά, από τα ν σημεία περνάνε ν(ν-1)/2 ευθείες, και προσθέτεις ένα ακόμα σημείο.»

Μ20: « Δεν θα έπρεπε να είναι ίσα αυτά;» [Εννοεί οι μορφές ν(ν-1)/2 και (ν+1)ν/2]

Συν: «Τι εννοείς ίσα;»

Μ20: «Το ν του ενός είναι το ν+1 του άλλου, αλλά το ν+1 του άλλου μπορεί να είναι ν κάποιου άλλου»

Διατυπώνεται εκ νέου το επαγωγικό βήμα, και τονίζεται η ανάγκη γεωμετρικής παρατήρησης με παράδειγμα οκτώ σημείων στο οποίο προστίθεται ένα σημείο ακόμα.

Συν: « Τι θα αλλάξει όταν προσθέσω άλλο ένα σημείο στο σχήμα;»

Μ20: « Το ν »

Συν: «…Στις ευθείες, τι θα αλλάξει. Δεν δημιουργούνται και άλλες ευθείες στο σχήμα;»

Μ20: « Ναι»

Συν: «Πόσες καινούριες ευθείες δημιουργούνται;»

Μ20: «ν-1» [Θεωρώντας και πάλι ν σημεία]

Συν: «Πόσα είναι τώρα τα σημεία;»

Μ20: «ν+1, άρα ν καινούριες ευθείες»

Και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Ακολουθεί σύγκριση των δύο αποδείξεων

Συν: « Την πρώτη απόδειξη την χαρακτήρισες πρακτική, κατασκευαστική, αυτή πως σου φαίνεται;»

M20: «Αυτή είναι πιο μαθηματική»

Ακολουθεί διάλογος αντίστοιχος με την συνέντευξη του M10, όπου ανακαλείται η γνώση των αξιωμάτων, και η χρήση τους στην πρώτη, «λιγότερο» μαθηματική απόδειξη, και ο μαθητής κρίνει ως έγκυρες και τις δύο αποδείξεις, χωρίς να εκφράζει προτίμηση.

Πρέπει επίσης να σημειωθεί πως ο συγκεκριμένος μαθητής προσπάθησε σε ευρετική κατεύθυνση, να βρει ένα γενικό τύπο με επαγωγικό συλλογισμό, (ενώ βέβαια δινόταν), και παρατήρησε την αριθμητική πρόοδο των επιπλέον ευθειών που δημιουργούνται σε κάθε βήμα, αλλά δεν μπόρεσε να συνεχίσει.

VII. Για την απόδειξη χωρίς μαθηματική επαγωγή σε κάποιους μαθητές, χρειάστηκε αρχικά επεξεργασία της με πέντε σημεία και αφού σωστά επισημάνθηκε από αυτούς πως αυτό δεν αποτελεί απόδειξη για ν σημεία, γενίκευσαν με επιτυχία. Στη συνέχεια διατυπώθηκαν απόψεις, για την απόδειξη αυτή.

M15: « Εύκολη, αλλά μπορεί να μπερδέψει εύκολα κόσμο,…, λογική απόδειξη»

M9: «Λογική, χειροπιαστή απόδειξη»

Μετά την παρουσίαση της επαγωγικής απόδειξης (για την οποία απόδειξη μία μαθήτρια δήλωσε: «τρώγεται»!) ειπώθηκαν χαρακτηριστικά τα εξής:.

M13 « Αυτό που δεν μπορούμε να βρούμε αμέσως και δυσκολευόμαστε,…, εντάξει μας φαίνεται [εκ των υστέρων εννοεί] πάντα "κάπως"» [εννοεί απλό]

M15: « Το απλό είναι πάντα δύσκολο»

M9: «θέλω να πω πως και οι δύο τρόποι βασίζονται πάνω στη γεωμετρική σκέψη, με βάση τα σημεία και τις ευθείες. Όταν κάποιος δεν έχει σκεφτεί αυτό, να συνδυάσει τα σημεία και τις ευθείες δεν θα είχε βρει κάτι.»

Συν: « Δηλαδή αν δεν είχε σκεφτεί γεωμετρικά;»

M9: «Ναι»

Συν: « Δεν φαίνεται από την ερώτηση ότι είναι γεωμετρία;»

M9: «Ναι»

Συν: « Τότε πως γίνεται ενώ φαίνεται από την ερώτηση ότι είναι γεωμετρία να μην σκέφτεται κανείς γεωμετρικά;»

M13: «Ε, γιατί κάνουμε μαθηματικά κατεύθυνσης»

[Εννοεί ότι η μαθηματική επαγωγή εντάσσεται στο σχολικό πρόγραμμα στο κεφάλαιο 4 , δηλαδή στη θεωρία αριθμών, και όχι στη γεωμετρία]

VIII. Το απόσπασμα που ακολουθεί καταγράφει τον διάλογο που εξελίχθηκε (με μαθητές υψηλών επιδόσεων) μετά την διδασκαλία της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή και αναφέρεται σε αυτήν.

Συν: «Άρα έχουμε το ζητούμενο»

Μ12: «Τι;… τελείωσε;»

Συν: « Πως σας φαίνεται;»

Μ16: « Αυτό πάρα πολύ ωραίο!»

Συν: « Γιατί σας άρεσε;»

Μ12: «Είχε σκέψη»

Μ16: « Γιατί δεν είχε υπολογισμούς, γι’ αυτό.»

Συν: « Είχε λίγους, στο τελευταίο βήμα.»

Μ16: « Ναι, εκεί με το “έξτρα” σημείο.»

Συν: « Ναι, πόσες καινούριες ευθείες ορίζει το “έξτρα” σημείο»

Μ16: «και όχι μόνο αυτό, γενικά ήταν σαν κάποιες σπαζοκεφαλιές ή κάτι τέτοιο.»

Μ12: «Δεν είναι τυποποιημένο»

Συν: « Η άλλη απόδειξη ήταν τυποποιημένη, ή δεν είχε σκέψη;»

Μ12: « Είχε σκέψη, αλλά το δεύτερο [επαγωγή] ήταν πιο απλό, κάτι τέτοιο δεν έχουμε ξανακάνει στο σχολείο»

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΕΙΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΠΡΩΤΗ

ΕΥΡΕΣΗ ΕΙΚΑΣΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n \ , \ n \in \mathbb{N}^*$

Ο στόχος μας είναι να μπορούμε να υπολογίζουμε το S_n συναρτήσει του n. Θα πρέπει λοιπόν το αποτέλεσμα S_n να εξαρτάται μόνο από το n, αλλά και επιπλέον να ισχύει για κάθε n. Καταγράφουμε τις 10 πρώτες παρατηρήσεις.

Εστιάζουμε την προσοχή μας στα ζεύγη (n,S_n) προσπαθώντας να εντοπίσουμε κάποια κανονικότητα στην μεταβολή τους, ως πρώτο βήμα για την εύρεση της πιθανής σχέσης που συνδέει το n με το S_n.
(1,1) , (2,3) , (3,6) , (4,10) , (5,15) (6,21) , (7,28) , (8,36) , (9,45) , (10,55)

Παρατηρούμε ότι οι περιττοί n είναι διαιρέτες των αντίστοιχων S_n και καταγράφοντας την Ευκλείδεια διαίρεσή τους, οδηγούμαστε στην πρώτη εικασία.
(1,1) , (3,6) , (5,15) , (7,28) , (9,45)

$$\begin{bmatrix} n=1 & S_1 = 1 = 1\cdot 1 \\ n=3 & S_3 = 6 = 3\cdot 2 \\ n=5 & S_5 = 15 = 5\cdot 3 \\ n=7 & S_7 = 28 = 7\cdot 4 \\ n=9 & S_9 = 45 = 9\cdot 5 \end{bmatrix} \rightarrow \quad S_n = n\cdot x \quad x = 1,2,3,...$$

Υπενθυμίζουμε πως πρέπει το αποτέλεσμα S_n να εξαρτάται μόνο από το n, οπότε θα πρέπει να βρούμε την σχέση που συνδέει το x με το n.

Για το σκοπό αυτό, αφού το n είναι περιττός φυσικός αριθμός, αξιοποιούμε την μορφή του n που προκύπτει από την Ευκλείδεια διαίρεσή του με το 2. Η καταγραφή των αποτελεσμάτων σε πίνακα είναι, όπως θα φανεί εξαιρετικά χρήσιμη αφού οδηγεί άμεσα στην πιθανή σχέση που αναζητούμε, αλλά και στην τελική εικασία για την περίπτωση του περιττού n.

Έστω n=2k+1 , k=0,1,2,3,… οπότε τώρα αναζητούμε την πιθανή σχέση του k με το x.

n	1	3	5	7	9
k	0	1	2	3	4
x	1	2	3	4	5

Άρα k=x-1, και n=2(x-1)+1 οπότε n=2x-1, $x=\dfrac{n+1}{2}$.

Τελικά προκύπτει: $S_n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$

Προχωρούμε εστιάζοντας στα ζεύγη (n,S_n) όπου n άρτιος φυσικός.

(2,3), (4,10) , (6,21) , (8,36) , (10,55)

Η παρατήρηση δεν οδηγεί άμεσα σε κάποιο συμπέρασμα, οπότε καταφεύγουμε και πάλι στην Ευκλείδεια διαίρεση.

Αφού n άρτιος έχουμε n=2k, k=1,2,… Θεωρούμε την Ευκλείδεια διαίρεση με διαιρετέο το S_n και διαιρέτη το n, διότι αναζητούμε την σχέση του S_n με τον n. Ο πίνακας των αποτελεσμάτων δίνει την πιθανή σχέση του S_n με τον k, άρα και με τον n, αφού n=2k.

n	2	4	6	8	10
k	1	2	3	4	5
S_n	3= $2\cdot1+1$	10= $4\cdot2+2$	21= $6\cdot3+3$	36= $8\cdot4+4$	55= $10\cdot5+5$

$$S_n=n\cdot k+k\,,\left[k=\frac{n}{2}\right]\rightarrow S_n=n\cdot\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\Rightarrow S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Οδηγηθήκαμε έτσι στην εικασία:

$S_n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ για κάθε θετικό ακέραιο n

Στην συνέχεια ακολουθεί συζήτηση στην τάξη, για την διαφορά εικασίας και απόδειξης, και προχωρούμε με την Μαθηματική Επαγωγή στην απόδειξη.

Παρατηρήσεις

(1) Είναι γνωστό πως η απόδειξη της παραπάνω σχέσης μπορεί να προκύψει ακολουθώντας και γενικεύοντας την σκέψη (που έκανε σε μικρή ηλικία ο Gauss), σύμφωνα με την οποία:

$$S_n + S_n = (1 + 2 + ... + n) + (1 + 2 + ... + n) \Rightarrow 2S_n = (1+n) + (2+n-1) + ... + n + 1 \Rightarrow$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + ... + (n+1)}_{n-\varphi o\rho\varepsilon\varsigma} \Rightarrow 2S_n = n(n+1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Στόχος μας όμως εδώ, είναι να δημιουργήσουμε διδακτικές καταστάσεις που όσο είναι δυνατόν να μην μας φέρουν αντιμέτωπους με την συχνή ερώτηση των μαθητών*: Πως περιμένατε να το σκεφτούμε εμείς αυτό;* Βεβαίως αν υπάρξουν μαθητές, που θα ακολουθήσουν την σκέψη του νεαρού Gauss ή θα θυμηθούν το ιστορικό σημείωμα σχολικού βιβλίου παλαιότερης τάξης, πιστεύουμε πως δεν πρέπει να τους αποτρέψουμε.

(2) Περισσότερο πιθανό είναι μάλλον κάποιοι μαθητές να σκεφτούν τον τύπο του αθροίσματος n-πρώτων όρων αριθμητικής προόδου (η απόδειξη του οποίου βασίζεται στο παραπάνω τέχνασμα) και είναι πολύ πιο προσιτός στους μαθητές, την εποχή που διδάσκονται την Μαθηματική Επαγωγή. Εδώ επισημαίνουμε πως θα ακολουθήσουν εφαρμογές όπου δεν θα υπάρχει αυτή η εναλλακτική κατεύθυνση, καθώς και την αξία της πολλαπλής ανάγνωσης του ίδιου προβλήματος.

(3) Αν και στην ανάπτυξη της διδακτέας ύλης η Μαθηματική Επαγωγή προηγείται της Ευκλείδειας διαίρεσης, προτείνεται η ενιαία διαπραγμάτευση των δύο παραγράφων, με στόχο την καλλιέργεια μιας πιο συνολικής αντίληψης για τα μαθηματικά.

(4) Η εμπλοκή του μαθητή σε διαδικασίες ανακάλυψης της προς απόδειξης εικασίας υλοποιεί, θεωρούμε, την κατασκευαστική θεωρία της γνώσης, συμβάλλει στην συνδυασμένη αξιοποίηση διαφορετικών περιοχών των Μαθηματικών, και λειτουργεί σε αντιστοιχία με τον τρόπο που (σύμφωνα με πολλούς Επιστημολόγους των Μαθηματικών) αναπτύσσεται η ίδια η Μαθηματική ανακάλυψη.

(5) Η παραπάνω διαπραγμάτευση θα μπορούσε να ενταχθεί στο πλαίσιο της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, για παράδειγμα, αποταμίευσης.

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΕΥΤΕΡΗ</u>

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΥ 2^{ν}-ΓΩΝΟΥ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ ΑΚΤΙΝΑΣ R, ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ν ΚΑΙ ΤΟΥ R

Θεωρούμε το κανονικό 2^n – γωνο, με n=2,3,… , το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Θεωρείται γνωστή η σχέση πλευράς, αποστήματος και ακτίνας $R^2 = a_{2^n}^2 + \frac{\lambda_{2^n}^2}{4}$ άρα

$$a_{2^n} = \sqrt{R^2 - \frac{\lambda_{2^n}^2}{4}} \quad (1)\ .$$

Αν $AB = \lambda_{2^n}$, η προέκταση του αποστήματος ΟΗ τέμνει τον κύκλο στο μέσο Μ του τόξου $\overset{\frown}{AB}$, οπότε

$AM = \lambda_{2^{n+1}}$, $AH = \frac{\lambda_{2^n}}{2}$, $HM = R - a_{2^n}$ και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΗ το πυθαγόρειο θεώρημα οδηγεί στην σχέση

$$\lambda_{2^{n+1}}^2 = (R - a_{2^n})^2 + \frac{\lambda_{2^n}^2}{4} = R^2 + a_{2^n}^2 - 2Ra_{2^n} + \frac{\lambda_{2^n}^2}{4} = 2R^2 - 2Ra_{2^n}$$ άρα

από την (1) έχουμε:

$$\lambda_{2^{n+1}}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_{2^n}^2}{4}} \quad , \quad n \geq 2$$

Γνωρίζοντας ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ θέτουμε n=2, προκειμένου να εξετάσουμε αν η μορφή του λ_8 που προκύπτει έχει κάποια "ομοιότητα" –σχέση, με την μορφή του λ_4 οπότε έχουμε

$$\lambda_8^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_4^2}{4}} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = 2R^2 - R^2\sqrt{2} =$$
$$= R^2(2 - \sqrt{2})$$
$$\lambda_8 = R\sqrt{(2 - \sqrt{2})}$$

Παρατηρούμε ότι η μορφή του λ_8 έχει όντως παρόμοια στοιχεία με αυτήν του λ_4, (την ακτίνα R επί μία τετραγωνική ρίζα που στην υπόρριζο ποσότητα έχει τον αριθμό 2) αλλά και διαφοροποιήσεις (στην υπόρριζο ποσότητα έχει διαφορά και ακόμα μία τετραγωνική ρίζα) που δεν μας επιτρέπουν σε αυτό το σημείο να "μαντέψουμε" την πιθανή μορφή του λ_{16}. Το γιατί συμβαίνει αυτό θα συζητηθεί λίγο αργότερα. Προς το παρόν θέτουμε n=3, προκειμένου να εξετάσουμε βαθύτερα η μορφή που προκύπτει.

$$\lambda_{16}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_8^2}{4}} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}} =$$
$$= 2R^2 - 2R\sqrt{\frac{2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4}} = 2R^2 - R^2\sqrt{2+\sqrt{2}} = R^2(2 - \sqrt{2+\sqrt{2}})$$

άρα τελικά $\lambda_{16} = R\sqrt{2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Παρατηρώντας την μορφή του λ_{16} βλέπουμε πως επαναλαμβάνεται η μορφή $R\sqrt{2...}$. Η τάση να γενικεύσουμε όσο γίνεται πιο γρήγορα, (καθώς συνειδητοποιούμε πως όσο αυξάνει η τιμή του n οι πράξεις γίνονται όλο και πιο "ενοχλητικές"), πιέζει στην κατεύθυνση της αναζήτησης και άλλων επαναλήψεων. Αν σε αυτό το σημείο εισαχθεί η λογική κάποιας μέτρησης, πρέπει να παρατηρήσουμε πως το πλήθος των αριθμών 2 που εμφανίζονται σε κάθε βήμα ταυτίζεται με το "n" που θέτουμε κάθε φορά. Μία κατά την γνώμη μας καθόλου εύκολη παρατήρηση, η οποία όμως μπορεί να γίνει και σε επόμενο βήμα.

Άλλωστε έχει εμφανιστεί και μία εναλλαγή προσήμων, και αυτό που επείγει, είναι να χειριστούμε αυτήν την εναλλαγή με σκοπό να ανακαλύψουμε τον τρόπο με τον οποίο εντάσσεται στα αναλλοίωτα της μορφής που αναζητούμε. Μιας μορφής που αρχίζει να "γεννιέται" από μας αλλά σιγά-σιγά "ενηλικιώνεται" και ανεξαρτητοποιείται σε τέτοιο βαθμό, από τις συγκεκριμένες και **ειδικές** τιμές του n, που το μόνο που απομένει είναι η απόδειξη της ύπαρξής της **για κάθε n.** Συνεπώς θέτουμε n=4, ελπίζοντας αυτή την φορά να ανακαλύψουμε την **πιθανή** τελική μορφή που αναζητούμε. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\lambda_{32}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_{16}^2}{4}} = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})}{4}} =$$

$$= 2R^2 - 2R\sqrt{\frac{2R^2 + R^2\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = 2R^2 - R^2\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} =$$

$$= R^2(2 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}})$$

άρα τελικά $$\lambda_{32} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Αν συγκεντρώσουμε τα αποτελέσματά μας

$$\lambda_8 = \lambda_{2^3} = R\sqrt{(2-\sqrt{2})}$$

$$\lambda_{16} = \lambda_{2^4} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\lambda_{32} = \lambda_{2^5} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$ παρατηρούμε ότι

1) Τα πρόσημα δείχνουν πια τάση για σταθεροποίηση,

2) Η μορφή $R\sqrt{2-\mathrm{A}}$ επίσης φαίνεται να επαναλαμβάνεται, όπου A το μεταβαλλόμενο μέρος της μορφής.

3) Κάθε αύξηση του n κατά μία μονάδα έχει σαν συνέπεια την εμφάνιση ενός $+\sqrt{2}$ στην υπόρριζο ποσότητα της εσωτερικής τετραγωνικής ρίζας. Οπότε ενισχύεται (ή πρωτοδημιουργείται) η πεποίθηση πως το πλήθος των αριθμών 2 που εμφανίζονται σε κάθε βήμα ταυτίζεται με το "n" που θέτουμε κάθε φορά.

4) Αν συμβολίσουμε με i το πλήθος των "2" στην παράσταση A του τύπου $R\sqrt{2-\mathrm{A}}$ ισχύει ότι $i = n-1$. Επειδή όμως αναζητούμε το μήκος της πλευράς του 2^{ν} –ΓΩΝΟΥ συναρτήσει του Ν γράφουμε τα αποτελέσματά μας ως εξής:

$$\lambda_8 = \lambda_{2^3} = R\sqrt{(2-\sqrt{2})} \quad ,n=2 \quad ,\nu=3$$

$$\lambda_{16} = \lambda_{2^4} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \quad , \quad n=3 \quad ,\nu=4$$

$$\lambda_{32} = \lambda_{2^5} = R\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \quad , \quad n=4 \quad ,\nu=5$$

Και επειδή $n=\nu-1$, έχουμε $i=\nu-2$ άρα η **πιθανή** τελική μορφή που αναζητούμε είναι $\lambda_{2^\nu} = R\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{\nu-2\ \varphi o\rho\varepsilon\varsigma}} \quad , \quad \nu \geq 2$, και ο δείκτης επί του οποίου θα εφαρμόσουμε μαθηματική επαγωγή και θα αποδείξουμε την εικασία, είναι το ν.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Alibert, D. , Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 215-230). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
[2] Avital, S. , Hansen, R.T. (1976) Educational Studies in Mathematics, Vol. 7, No.4. pp.399-411

[3] Babai, L (1992). Transparent proofs. Focus. 12(3), 1-2. In Harel, G. & Sowder L. (1998), Students' proof Schemes: Results from Exploratory Studies, JBMS Issues in Mathematics Education, Volume 7.

[4] Boyer, C.B. (1989) A history of mathematics (2nd edition). New York: Wiley. In Harel, G. & Sowder L. (1998), Students' proof Schemes: Results from Exploratory Studies, JBMS Issues in Mathematics Education, Volume 7.

[5] Brousseau, G. Theory of didactical situations in mathematics, Kluwer Academic Publishers, 1997

[6] Brownell, W.A. , (1935). Psychological considerations in learning and teaching arithmetic. In NCTM, Tenth Yearbook, the teaching of Arithmetic, Columbia Univercity Press, New York.

[7] Carpenter, T.P. , Corbitt, M.K. , Kepner H.S. , Lindquist, M.M. ,and Reys R. (1980) Results of the second NAEP mathematics asssessment: secondary school, The Mathematics Teacher, 73(5), 329-338.

[8] Davis, P. , & Hersh, R (1981) Η μαθηματική εμπειρία, Αθήνα, Τροχαλία.

[9] Ernest, P. (1984) Educational Studies in Mathematics, Vol. 15, No.2. pp.173-189

[10] Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and certitude in the development of mathematical thinking. In A. Vermandel (Ed.) Proceedings of the Sixth International Conference of the Psychology of Mathematics Education (pp.128-131) Adwerp, Belgium: Univesitaire Istelling Adwerpen.

[11] Goetting. M. (1995). The college student's understanding of mathematical proof (Doctoral dissertation, University of Maryland, 1995). Dissertations Abstracts International, 56-A, 3016, Feb., 1996.

[12] Golovina, L., & Yaglom, I. (1979). *Induction in geometry*. Mir Publishers, Moscow.

[13] Harel, G. & Sowder L. (1998), Students' proof Schemes: Results from Exploratory Studies, JBMS Issues in Mathematics Education, Volume 7.

[14] Hiebert, J. and Lefevre P. , (1986) Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (ed.) Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

[15] Hintikka, J, The principles of mathematics revisited, Cambridge university press, 2003

[16] Kilpatrick, J. , (1998) Editorial, Journal for Reasearch in Mathematics Education, 19(4).

[17] Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. Mathematics Magazine, 64(5), 291-314.

[18] Lakatos, I. Αποδείξεις και ανασκευές, Τροχαλία 1996

[19] Lovell, K. (1971) The development of the concept of mathematical proof in abler pupils. In M. Rosskopf, L. Steffe, & S. Tabac (Eds.), Piagetian cognitive-develoment research and mathematical education (pp. 66-80). Washihgton, DC: National council if Teachers of Mathematics.

[20] MacPherson, E. D. , (1985). The themes of geometry: design of the nonformal geometry curriculum. In C. Hirsch & M. Sweng (Eds.) The secondary school mathematics curriculum, 1985 Yearbook (pp.65-80). Reston, VA: National council if Teachers of Mathematics.

[21] Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. Journal for Reasearch in Mathematics Education, 20(1), 41-51.

[22] Μυτιληναίος, Μ. (2004). *Λογική.* Αθήνα: Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών

[23] Μυτιληναίος, Μ. , Κατερίνης, Π. Διακριτά Μαθηματικά, 1993, εκδ. Μπένου

[24] Nagel, E. , Newman, J.R. το θεώρημα του Gödel, τροχαλία, 1991

[25] National council if Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston VA: Author.

[26] Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., & Γιαννακούλιας. Ε. (1999). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι.* Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[27] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2005). *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθημάτων στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

[28] Piaget, J. (1970) Genetic Epistemology, W.W. Norton, New York.

[29] Polya, G. Πώς να το λύσω, εκδ. Καρδαμίτσα, 1991 (Μετάφραση της 2ης έκδοσης του 1957)

[30] Porteus, K. (1986). Children's appreciation of the significance of proof. Proceedings of the Tenth International Conference of the Psychology of Mathematics Education (pp. 392-397). London, England.

[31] Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando, FL: Academic Press.

[32] Semadeni, Z. (1980) Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. For the Learning of Mathematics, 4, 32-34.

[33] Sfard A. (1991). On the Dual Nature of the Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36

[34] Shaughnessy, J.M. , & Burger, W.F. (1985). Spadework prior to deduction in geometry. Mathematics Teacher, 78(6), 419-428.

[35] Sierpinska, A. (1999/2002) Lecture Notes on the Theory of Didactical Situations, Concordia univercity. (μετάφραση Νικολουδάκη Μανόλη).

[36] Skemp, R.R. (1971) The Psychology of Learning Mathematics, Penguin Books, Harmondswoth, England.

[37] Σπύρου, Π. (2005). *Επιστημολογία των Μαθηματικών*. Σημειώσεις παραδόσεων. Αθήνα.

[38] Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (accepted). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education.*

[39] Tall D. & Thomas M. & Davis G. & Gray E. & Simpson A. (2000), What is the Object of the Encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior* 18 (2), 223-241.

[40] Τουμάσης, Μ. (1994) Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών, Gutemberg, Αθήνα.

[41] Usiskin, Z. (1980). What sould not be in the algebra and geometry curricula of average college-bound students? Mathematics Teacher, 73, 413-424.

[42] Vinner, S. (1983). The notion of proof: Some aspects of students' view at the senior high level. Proceedings of the Seventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education Rehovot, Israel: Weizmann Institute of Science.